第 27 卷 第 4 期 重庆理工大学学报(自然科学) 2013 年 4 月
Vol. 27 No. 4 Journal of Chongqing University of Technology(Natural Science) Apr. 2013

doi:10.3969/j.issn.1674-8425(z).2013.04.027

平衡损失函数下具有时间变化效应的信度保费

李新鹏,吴黎军

(新疆大学 数学与系统科学学院,乌鲁木齐 830046)

摘 要:在经典信度理论中,一个保单组合中各风险之间是相互独立的,并且对于这组保单的某一特定的个体,没有考虑其在过去各年索赔额的时间变化效应,在均方损失函数下推导出它的信度保费。为此,在研究个体过去索赔额序列间具有时间变化效应的特殊相关结构的信度保费表达式的基础上,采用平衡损失函数考虑此种风险结构的信度理论,得到了 Bühlmann 和 Bühlmann-Straub 模型的信度保费。

关 键 词:信度保费;时间变化效应;平衡损失函数

中图分类号:O212 **文献标识码:**A **文章编号:**1674-8425(2013)04-0133-05

The Credibility Premiums with Time Varying Effects under Balanced Loss Functions

LI Xin-peng, WU Li-jun

(College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi 830046, China)

Abstract: In classical credibility theory, the risks in a portfolio are assumed to be independent and time varying effects are ignored for specific individual risk in the portfolio. The premiums are derived under squared error loss functions. In this paper, we develop the credibility theory under balanced loss functions with a special dependence structure among the individual risks: induced by time varying effects (Wen et al., 2012). Credibility premiums under balanced loss functions with time varying effects are derived for Bühlmann and Bühlmann-Straub credibility models.

Key words: credibility premium; time varying effects; balanced loss functions

1 预备知识

在保险实际应用中,精算师的一个重要任务之一就是对给定的风险制定一个合适的保费。现代信度理论起源于 Bühlmann[1] 得到了任意分布下的净保费信度估计。信度理论是基于过去的索赔经历来制定保费的一种定量方法。信度保费为样

收稿日期:2012-10-16
作者简介:李新鹏(1986—),男,甘肃人,硕士研究生,主要从事精算数学研究。

本均值和聚合保费的加权和,其中权重因子又被称为信度因子。

令 X_i 表示保单持有人在第 i 个保单时期的索赔额,X_i 的分布依赖于风险参数 Θ。由于风险的非其次性,一般假设 Θ 是随机变量,具有先验分布为 $\pi(\theta)$,若给定 $\Theta=\theta$,$X_i(i=1,2\cdots n)$ 相互独立,且有相同的分布函数 $F(x,\theta)$。信度理论的目的是在给定保单持有人的前 n 个时期根据索赔经历来计算第 $n+1$ 个时期的保费。如果将估计限定在索赔额的线性函数中,则得到著名的信度公式:

$$\mu(\theta)^{*} = z\bar{X} + (1-z)\mu$$

其中:$z=n/(n+k)$ 为信度因子;k 为条件方差的期望值与条件期望的方差值的比值;$\bar{X}=\sum_{i=1}^{n} X_i/n$ 为样本均值;μ 为聚合保费。

经典的信度理论中假定不同年份的索赔序列有共同的风险参数,在风险参数给定时,各年的索赔相互独立,且具有相同的分布,没有考虑不同年份之间风险的时间效应。温利民等[2]在均方损失函数下研究了各年索赔风险间具有时间变化效应的信度模型,得到了相应的信度保费。考虑时间方面相依性的信度模型与实际情况更为符合。温利民等在 2009 年研究了各年索赔风险间具有等相关的信度模型,得到了相应的信度保费。Bolancé 等[3]建立了索赔频率风险模型,得到了时间效应为自相关时间序列时的信度保费。Purcaru 与 Denuit[4]在 Poisson 索赔频率风险模型中讨论了相依结构对信度估计的影响。Frees 等[5]研究了时间效应为 Student-t copula 时的信度保费。

经典的决策论中,损失函数的选择通常取决于估计的精确性,然而,拟合的好坏也是一个重要的标准。Zellner[6]引入了平衡损失函数的概念,它既反映了好的拟合度又反映了估计的精确性,函数如下:

$$L(\hat{\theta},\theta) = \frac{w}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{\theta})^2 + (1-w)(\theta-\hat{\theta})^2 \tag{1}$$

$$= \frac{w}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 + w(\bar{X}-\hat{\theta})^2 + (1-w)(\theta-\hat{\theta})^2 \tag{2}$$

其中:$\bar{X}$ 为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的均值;θ 为真实值,$\hat{\theta}$ 为 θ 的估计值。式(1)右边第 1 项反映了拟合的好坏,第 2 项反映了估计的精确性。由式(2)可以得到一个广义的平衡损失函数:

$$L_{\rho,w,\delta_0}(\theta,\delta) = w\rho(\delta_0,\delta) + (1-w)\rho(\theta,\delta) \tag{3}$$

其中:ρ 为距离函数;δ_0 为目标估计,它通常由极大似然估计、最小二乘法或者无偏性条件获得;δ 为 θ 的估计值;距离函数通常选为均方误差损失函数。

本文在平衡损失函数下考虑了具有时间变化效应的信度模型,并且得到了相应的信度保费[7-10]。

2 模型假设与准备

在信度理论中,假设保单组合的风险参数为 Θ,且有 n 年的索赔额,由于风险的非齐次性,风险参数 Θ 假定为随机变量。本文的目标为预测保单在未来 1 年的索赔 X_{n+1}。但与经典的信度理论不同,本文假设在风险参数给定的条件下,索赔随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 有各自的风险参数 $\Theta_1,\Theta_2,\cdots,\Theta_n$,且这些风险参数具有某种相依结构。模型的基本假设如下:

假设 1 给定时间变化效应 $\Theta_i=\theta_i$ 时,索赔额 $X_i,i=1,\cdots,n$ 互相独立且同分布 $E(X_i|\Theta_i)=\mu(\Theta_i)$,$Var(X_i|\Theta_i)=\sigma^2(\Theta_i)$,$i=1,2,\cdots,n$。

假设 2 风险参数 Θ_i 的分布函数为 $\pi_i(\theta)$,且 $E[\mu(\Theta_i)]=\mu$,$E[\sigma^2(\Theta_i)]=\sigma_i^2$ 和协方差 $Cov[\mu(\Theta_i),\mu(\Theta_j)]=\tau_i\tau_j$. $i,j=1,\cdots n$。

假设 3 本文中平衡损失函数为:

$$L(A,B) = w(\delta_0(X)-A-BX)^2 + (1-w)(X_{n+1}-A-BX)^2$$

其中 $\delta_0(X)$ 为目标估计,$X=(X_1,\cdots,X_n)'$ 且 $E[\delta_0(X)]=\mu_\delta$,$Cov[\delta_0(X),X_i]=d_i$,$i=1,2,\cdots,n$,$w$ 为权重因子。

本文目标为求解下面最优化问题:

$$\min_{A,B} E[w(\delta_0(X)-A-BX)^2+(1-w)(X_{n+1}-A-BX)^2] \tag{4}$$

为求解最优化问题(4),记 $L(X,1)=\{a_0+\sum_{i=1}^{n}a_iX_i, a_i\in R, i=0,1,\cdots,n\}$。

引理 1 ~ 3[2] 表明了相依结构的一些简单但重要的性质。

引理 1 在假设 1 和假设 2 下,有:

① X_i 的均值为

$$E(X_i)=\mu, i=1,\cdots,n \tag{5}$$

② 过去索赔和未来索赔的协方差为

$$Cov(X_{n+1},X)=\tau_{n+1}(\tau_1,\cdots,\tau_n) \tag{6}$$

③ X 的协方差矩阵为

$$Cov(X,X)=diag(\sigma_i^2, i=1,2,\cdots,n)+(\tau_1,\cdots,\tau_n)'(\tau_1,\cdots,\tau_n) \tag{7}$$

其中 $diag[\cdots]$ 为对角矩阵。

④ X 的协方差矩阵的逆为

$$Cov(X,X)^{-1}=diag(1/\sigma_i^2, i=1,2,\cdots,n)-\frac{1}{1+\sum_{i=1}^{n}\tau_i^2/\sigma_i^2}\left(\frac{\tau_1}{\sigma_1^2},\cdots,\frac{\tau_n}{\sigma_n^2}\right)'\left(\frac{\tau_1}{\sigma_1^2},\cdots,\frac{\tau_n}{\sigma_n^2}\right) \tag{8}$$

引理 2 假设 $(X'_{1\times p},Y'_{1\times q})'$ 为一随机向量,期望和协方差矩阵分别为 (μ'_X,μ'_Y) 和 $\begin{pmatrix}\Sigma_{XX}\Sigma_{XY}\\ \Sigma_{YX}\Sigma_{YY}\end{pmatrix}$,则当 $A=\mu_Y-\Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}\mu_X$,$B=\Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}$ 时,期望损失 $E(Y-A-BX)'(Y-A-BX)$ 达到最小。

引理 3 风险 X_{n+1} 的非齐次信度估计为 X_{n+1} 在 $L(X,1)$ 上的正交投影,即

$$proj(X_{n+1}\mid L(X,1))=E(X_{n+1})+Cov(X_{n+1},X)Cov(X,X)^{-1}(X-E(X))$$

3 平衡损失函数下的信度估计

定理 1 为最优化问题(4)的解,即未来索赔 X_{n+1} 的信度保费。

定理 1 在假设 1 ~ 3 下,运用平衡损失函数,X_{n+1} 的最优线性非齐次估计为

$$\hat{X}_{n+1}=z_1\bar{X}_\tau+z_2\bar{X}_d+w\mu_\delta+(1-z_1-z_2-w)\mu$$

其中:

$$z_1=\left[(1-w)\frac{\tau_{n+1}}{1+\sum_{i=1}^{n}\tau_i^2/\sigma_i^2}-w\frac{\sum_{i=1}^{n}d_i\tau_i/\sigma_i^2}{1+\sum_{i=1}^{n}\tau_i^2/\sigma_i^2}\right]\sum_{i=1}^{n}\tau_i/\sigma_i^2$$

$$z_2=w\sum_{i=1}^{n}d_i/\sigma_i^2, \bar{X}_\tau=\frac{\sum_{i=1}^{n}\tau_iX_i/\sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{n}\tau_i/\sigma_i^2},$$

$$\bar{X}_d=\frac{\sum_{i=1}^{n}d_iX_i/\sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{n}d_i/\sigma_i^2}$$

证明 引入一随机变量 $Y=I\delta_0(X)+(1-I)X_{n+1}$,其中 I 为 0 - 1 随机变量,它独立于其他的随机变量,并且 $P(I=1)=1-P(I=0)=w$,w 为式(4)中的权重因子。因此,最优化问题(4)等价于

$$\min_{A,B}E[(Y-A-BX)'(Y-A-BX)] \tag{9}$$

由引理 2 和引理 3 知,下一年保费的最优估计为

$$\hat{X}_{n+1}=\mu_Y+\Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}(X-EX) \tag{10}$$

根据 Y 的定义,均值 μ_Y 为:

$$\mu_Y=EY=E[E(Y\mid I)]=(1-w)E(Y\backslash I=0)+wE(Y\backslash I=1)=(1-w)EX_{n+1}+wE[\delta_0(X)]=(1-w)\mu+w\mu_\delta$$

又因为 $E(X\backslash I)=E(X)$ 为一常数,所以

$$Cov[E(Y\backslash I),E(X\backslash I)]=0$$

$$\Sigma_{YX}=Cov(Y,X)=E[Cov(Y,X\backslash I)]+Cov[E(X\backslash I),E(Y\backslash I)]=(1-w)Cov(Y,X\backslash I=0)+wCov(Y,X\backslash I=1)=(1-w)Cov(X_{n+1},X)+wCov(\delta_0(X),X)=$$

$$(1-w)\tau_{n+1}(\tau_1,\cdots,\tau_n)+w(d_1,\cdots,d_n)$$

$$\Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}=[(1-w)\tau_{n+1}(\tau_1,\cdots,\tau_n)+w(d_1,\cdots,d_n)][diag(1/\sigma_i^2,i=1,2,\cdots,n)-\frac{1}{1+\sum_{i=1}^{n}\tau_i^2/\sigma_i^2}(\frac{\tau_1}{\sigma_1^2},\cdots,\frac{\tau_n}{\sigma_n^2})'(\frac{\tau_1}{\sigma_1^2},\cdots,\frac{\tau_n}{\sigma_n^2})]=$$

$$\left(\frac{wd_1}{\sigma_1^2}+[(1-w)\tau_{n+1}-\alpha]\frac{\tau_1}{\sigma_1^2},\cdots,\frac{wd_n}{\sigma_n^2}+[(1-w)\tau_{n+1}-\alpha]\frac{\tau_n}{\sigma_n^2}\right)$$

其中：$\alpha=\frac{\sum_{i=1}^{n}(wd_i+(1-w)\tau_{n+1}\tau_i)\tau_i/\sigma_i^2}{1+\sum_{i=1}^{n}\tau_i^2/\sigma_i^2}$

$$\Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}(X-EX)=z_1\bar{X}_\tau+z_2\bar{X}_d-(z_1+z_2)\mu$$

z_1、$\bar{X}_\tau$、z_2、$\bar{X}_d$ 见定理 1 的描述。所以，下一年的最优非齐次信度保费为

$$\hat{X}_{n+1}=z_1\bar{X}_\tau+z_2\bar{X}_d+w\mu_\delta+(1-z_1-z_2-w)\mu$$

定理得证。

注 1 当 $w=0$ 时，此定理给出的保费与温利民等在 2012 年提出的具有时间变化效应信度模型的保费一致。

4 Bühlmann-Straub 模型的信度估计

本节将给出在平衡损失函数下具有时间变化效应的 Bühlmann-Straub 信度模型的保费。将假设 1 中的 $Var(X_i|\Theta_i)=\sigma^2(\Theta_i)$ 改为 $Var(X_i|\Theta_i)=\sigma^2(\Theta_i)/m_i,i=1,2,\cdots,n,m_i$ 为 X_i 自然权重因子，其他假设不变。

引理 4 在本文第 3 节的假设和上面的假设下，有以下结果：

① X_i 的均值为

$$E(X_i)=\mu,i=1,\cdots,n \tag{11}$$

② 过去索赔和未来索赔的协方差为

$$Cov(X_{n+1},X)=\tau_{n+1}(\tau_1,\cdots,\tau_n) \tag{12}$$

③ X 的协方差矩阵为

$$Cov(X,X)=diag(\sigma_i^2/m_i,i=1,2,\cdots,n)+(\tau_1,\cdots,\tau_n)'(\tau_1,\cdots,\tau_n) \tag{13}$$

其中 $diag[\cdots]$ 为对角矩阵。

④ X 的协方差矩阵的逆为

$$Cov(X,X)^{-1}=diag(m_i/\sigma_i^2,i=1,2,\cdots,n)-\frac{1}{1+\sum_{i=1}^{n}m_i\tau_i^2/\sigma_i^2}(\frac{m_1\tau_1}{\sigma_1^2},\cdots,\frac{m_n\tau_n}{\sigma_n^2})'(\frac{m_1\tau_1}{\sigma_1^2},\cdots,\frac{m_n\tau_n}{\sigma_n^2}) \tag{14}$$

定理 2 在本文第 3 节假设和本节假设下，运用平衡损失函数，X_{n+1} 的最优线性非齐次估计为

$$\hat{X}_{n+1}=z_1\bar{X}_\tau^m+z_2\bar{X}_d+w\mu_\delta+(1-z_1-z_2-w)\mu$$

其中：

$$z_1=[(1-w)\frac{\tau_{n+1}}{1+\sum_{i=1}^{n}m_i\tau_i^2/\sigma_i^2}-w\frac{\sum_{i=1}^{n}d_i\tau_im_i/\sigma_i^2}{1+\sum_{i=1}^{n}m_i\tau_i^2/\sigma_i^2}]\sum_{i=1}^{n}m_i\tau_i/\sigma_i^2$$

$$z_2=w\sum_{i=1}^{n}d_i/\sigma_i^2,\bar{X}_\tau^m=\frac{\sum_{i=1}^{n}\tau_im_iX_i/\sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{n}\tau_im_i/\sigma_i^2}$$

$$\bar{X}_d=\frac{\sum_{i=1}^{n}d_iX_i/\sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{n}d_i/\sigma_i^2}$$

定理 2 的证明与定理 1 的证明类似，所以只给出粗略的证明。

证明 引入一随机变量 $Y=I\delta_0(X)+(1-I)\cdot X_{n+1}$，其中 I 为 0～1 随机变量，它独立于其他的随机变量，并且 $P(I=1)=1-P(I=0)=w,w$ 为式(4)中的权重因子。因此，最优化问题(4)等价于

$$\min_{A,B}E[(Y-A-BX)'(Y-A-BX)]$$

由引理 2 和引理 3 知：下一年保费的最优估计为

$$\hat{X}_{n+1}=\mu_Y+\Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}(X-EX)$$

$$\Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}=[(1-w)\tau_{n+1}(\tau_1,\cdots,\tau_n)+w(d_1,\cdots,d_n)][diag(m_i/\sigma_i^2,i=1,2,\cdots,n)-$$

$$\frac{1}{1+\sum_{i=1}^{n} m_i\tau_i^2/\sigma_i^2}\left(\frac{m_1\tau_1}{\sigma_1^2},\cdots,\frac{m_n\tau_n}{\sigma_n^2}\right)'\left(\frac{m_1\tau_1}{\sigma_1^2},\cdots,\frac{m_n\tau_n}{\sigma_n^2}\right)\Big] =$$

$$\left(\frac{wd_1}{\sigma_1^2}+[(1-w)\tau_{n+1}-\alpha]\frac{m_1\tau_1}{\sigma_1^2},\cdots,\frac{wd_n}{\sigma_n^2}+[(1-w)\tau_{n+1}-\alpha]\frac{m_n\tau_n}{\sigma_n^2}\right)$$

其中

$$\alpha=\frac{\sum_{i=1}^{n}(wd_i+(1-w)\tau_{n+1}\tau_i)\tau_i m_i/\sigma_i^2}{1+\sum_{i=1}^{n} m_i\tau_i^2/\sigma_i^2}$$

所以，下一年最优非齐次信度保费为

$$\hat{X}_{n+1}=z_1\bar{X}_\tau^m+z_2\bar{X}_d+w\mu_\delta+(1-z_1-z_2-w)\mu$$

其中 z_1、$\bar{X}_\tau^m$、z_2、$\bar{X}_d$ 见定理 1 的描述。定理 2 得证。

5 结束语

本文运用平衡损失函数，研究了具有时间变化效应的 Bühlmann 和 Bühlmann-Straub 信度模型的保费估计问题，并且推导出相应的信度保费，但是对于参数 $\sigma_i^2,\tau_i^2,d_i,i=1,2,\cdots,n$ 的估计还需今后深入研究。

参考文献：

[1] Bühlmann H, Gisler A. A course in credibility theory and its applications [M]. Netherlands: Springer, 2005: 77 – 264.

[2] 温利民，郑丹，章溢. 具有时间变化效应的信度模型[J]. 江西师范大学学报：自然科学版，2012，36(3)：249 – 252.

[3] Bolancé C, Guillé M, Pinquet J. Time-varying credibility for frequency risk models: estimation and tests for autogressive specification on the random effects[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2003, 33 (2): 273 – 282.

[4] Purcaru O, Denuit M. On the dependence induced by frequency credibility models[J]. Belgian Acturial Bulletin, 2002, 2(1): 73 – 79.

[5] Frees E W, Wang Ping. Credibility using copulas[J]. North American Acturial Journal, 2005, 9(2): 31 – 48.

[6] Zellner A. Bayesian and non-Bayesian estimation using balanced loss functions [M]. New York: Springer-Verlag, 1994: 377 – 390.

[7] Wen Limin, Wu Xianyi, Zhou Xian. The credibility premiums for models with dependence induced by common effects [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2009, 44(1): 19 – 25.

[8] Wu Xianyi, Huang Weizhong. The credibility premiums with common effects obtained under balanced loss functions[J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 2012, 28(2): 203 – 216.

[9] Wen Limin, Wang Wei, Yu Xueli. Credibility models with error uniform dependence[J]. Journal of East China Normal University: Natural Science, 2009, 5: 118 – 126.

[10] Gómez-Deniz E. A generalization of the credibility theory obtained by using the weighted balanced loss function [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 42: 850 – 854.

（责任编辑　刘　舸）