第28卷　第2期　重庆理工大学学报(自然科学)　2014年2月
Vol. 28　No. 2　Journal of Chongqing University of Technology(Natural Science)　Feb. 2014

doi:10.3969/j.issn.1674-8425(z).2014.02.026

具有庇护所的Kolmogorov型捕食-食饵系统的研究

林　琳[1],雒志学[2]

(1.运城农业职业技术学院 基础教学部,山西 运城　044000;2.兰州交通大学,兰州　730070)

摘　　要:研究了一类具有庇护所效应的Kolmogorov型捕食-食饵系统,讨论了该系统平衡点的存在性,利用常微分方程定性理论,得到了平衡点的稳定性及解的有界性。

关 键 词:庇护所效应;捕食者;食饵;平衡;稳定性;有界性

中图分类号:O175.1　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1674-8425(2014)02-0120-03

Kolmogorov Predator-Prey System with Prey Refuges

LIN Lin[1], LUO Zhi-xue[2]

(1. Primary Education Department, Yuncheng Polytechnic College of Agriculture, Yuncheng 044000, China; 2. Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: This paper studies the Kolmogorov prey-predator system with prey refuges. The existence of the equilibriums is discussed. By using the qualitative theory of ordinary differential equations, the stability of equilibriums and the boundedness of solutions are obtained.

Key words: shelter effect; predator; prey; equilibrium point; stability; boundedness

近年来,许多学者对食饵具有庇护所效应的捕食系统开展了研究,且获得了很好的结果[1-8],但对于Kolmogorov模型的研究成果还不多见。本文以Kolmogorov模型[9]为基础,建立了一类具有庇护所效应的两种群捕食-被捕食模型。

1　模型假设及建立

假定捕食者和食饵种群的密度随时间连续变化,并且均匀分布于生境斑块上。两种群均被视为同质种群,即无阶段结构。基于以上假设,建立了Kolmogorov型捕食-食饵系统:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=xg(x)-q\varphi(x)y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=(p\varphi(x)-c)y\end{cases}\tag{1}$$

其中,$x(t)$和$y(t)$分别表示食饵种群和捕食者种群在t时刻的密度。模型(1)基于以下假设:① 存在正常数K,使得对于一切的$0<x<K$,均有

收稿日期:2013-10-26
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11061017);甘肃省自然科学基金资助项目(1010RJZA075)
作者简介:林琳(1983—),女,讲师,硕士,主要从事生物数学研究。
引用格式:林琳,雒志学.具有庇护所的Kolmogorov型捕食-食饵系统的研究[J].重庆理工大学学报:自然科学版,2014(2):120-122.
Citation format:LIN Lin, LUO Zhi-xue. Kolmogorov Predator-Prey System with Prey Refuges[J]. Journal of Chongqing University of Technology:Natural Science,2014(2):120-122.

$g(x)>0$;$g(K)>0$;② 对于一切的 $x\geqslant 0$,有 $\varphi(0)=0$,$\varphi'(x)>0$;③ 函数 $g(x)$ 和 $\varphi(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 的连续可微函数。

如果假设食饵种群的增长率满足 Logistic 定理,捕食者具有 Holling 型的饱和功能反应,那么系统(1)变为:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r\left(1-\dfrac{x}{K}\right)x-\dfrac{qxy}{x+a}\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\left(\dfrac{px}{x+a}-c\right)y\end{cases}\tag{2}$$

其中:r 为食饵种群的内禀增长率;K 是环境容纳量;q 表示捕食者的最大消耗率;p 表示从食饵转化为捕食者增长的转化率;c 为捕食者的死亡率。r、K、q、a、p、c 均为正常数。

用 x_R 表示庇护所中的食饵密度,那么将庇护所效应引入系统(2),则得到具有庇护所效应的捕食 - 食饵系统:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r\left(1-\dfrac{x}{K}\right)x-\dfrac{q(x-x_R)y}{(x-x_R)+a}\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\left(\dfrac{p(x-x_R)}{(x-x_R)+a}-c\right)y\end{cases}\tag{3}$$

其中假定 $c<p<2c$。

本文从 2 个方面来讨论庇护所效应:① 庇护所中的食饵密度与现有密度成正比,比例常数为 γ,即 $x_R=\gamma x$,$(0\leqslant\gamma\leqslant 1)$;② 庇护所中的食饵密度为常数,即 $x_R=R$。本文只分析第 1 种情形,第 2 种情形的讨论与第 1 种情形类似。

2　主要结果

如果庇护所中的食饵密度与现有密度成正比,比例常数为 $\gamma(0\leqslant\gamma<1)$,则系统(3)变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r\left(1-\dfrac{x}{K}\right)x-\dfrac{qxy}{x+\dfrac{a}{1-\gamma}}\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\left(\dfrac{px}{x+\dfrac{a}{1-\gamma}}-c\right)y\end{cases}\tag{4}$$

令 $a'=\dfrac{a}{1-\gamma}$,当 $\gamma<1-\dfrac{a'c}{K(p-c)}$时,该系统共有 3 个非负平衡点:$O(0,0)$、$P_K(K,0)$、$P(x^*,y^*)$。其中:$x^*=\dfrac{a'c}{p-c}$,$y^*=\dfrac{a'rp[K(p-c)-a'c]}{q(p-c)^2}$。

显然,若 $\gamma=1-\dfrac{a'c}{K(p-c)}$,则正平衡点 $P(x^*,y^*)$ 退化为平衡点 $P_K(K,0)$。令 $x_{(o)}=Kx_{(n)}$,$y_{(o)}=\dfrac{rK}{Q}y_{(n)}$,$t=\dfrac{x^2+A^2}{r}\tau$,其中下标 (n) 表示新的变量,下标 (o) 表示旧的标量,则系统(4)变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}=[(1-x)(x+A)-y]x\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}=B[x-C(x+A)]y\end{cases}\tag{5}$$

其中:$A=(a'/K)$;$B=(p/r)<1$;$C=(c/p)<1$。

因为 $J=\begin{pmatrix}K & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{rk}{q} & 0\\ -\dfrac{r}{(x+A)^2} & 0 & \dfrac{r}{x+A}\end{pmatrix}$ 且 $\|J\|=\dfrac{r^2K^2}{q(x+A)}>0$,所以变换 $x_{(o)}=Kx_{(n)}$,$y_{(o)}=\dfrac{rK}{Q}y_{(n)}$,$t=\dfrac{x^2+A^2}{r}\tau$ 是一一对应的。

当 $1-C-AC>0$ 时,系统(5)共有 3 个非负平衡点:$O(0,0)$、$Q_1(1,0)$、$Q(\overline{x^*},\overline{y^*})$。其中:$\overline{x^*}=\dfrac{AC}{1-C}$;　$\overline{y^*}=\dfrac{A(1-C-AC)}{(1-C)^2}$。

如果 $1-C-AC=0$,则平衡点 $Q(\overline{x^*},\overline{y^*})$ 退化为 $Q_1(1,0)$;如果 $1-C-AC<0$,则平衡点 $Q(\overline{x^*},\overline{y^*})$ 位于第 4 象限,这时系统(5)只有 2 个非负平衡点:$O(0,0)$、$Q_1(1,0)$。

下面给出关于平衡点稳定性的结论。

定理 1

1）原点 $O(0,0)$ 为系统(5)的鞍点。

2）若 $1-C-AC>0$,平衡点 $Q_1(1,0)$ 为系统(5)的鞍点;若 $1-C-AC<0$,平衡点 $Q_1(1,0)$ 为系统(5)的稳定焦点或结点。

3）若 $1-C-AC>0$,平衡点 $Q(\overline{x^*},\overline{y^*})$ 为系统(5)的不稳定点;若 $1-C-AC<0$,平衡点 $Q(\overline{x^*},\overline{y^*})$ 为系统(5)的稳定焦点或结点。

证明

1）系统(5)在原点 $O(0,0)$ 处的 Jacobia 矩阵

为$J|_{(0,0)}=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & -ABC\end{pmatrix}$。显然矩阵有一正一负的特征根：$\lambda_1=A$，$\lambda_2=-ABC$，所以初始平衡点$O(0,0)$为不稳定鞍点。

2）系统(5)在平衡点$Q_1(1,0)$处的Jacobia矩阵为$J|_{(0,0)}=\begin{pmatrix}-1-A & -1\\ 0 & B(1-C-AC)\end{pmatrix}$，2个特征值分别为：$\lambda_1=-1-A$，$\lambda_2=B(1-C-AC)$。显然，当$1-C-AC>0$时，平衡点$Q_1(1,0)$为系统(5)的鞍点；当$1-C-AC<0$时，平衡点$Q_1(1,0)$为系统(5)的稳定焦点或结点。

3）系统(5)在平衡点$Q(\overline{x^*},\overline{y^*})$处的Jacobia矩阵为$J|_{(\overline{x^*},\overline{y^*})}=\begin{pmatrix}-2\overline{x^{*2}}+(1-A)\overline{x^*} & -\overline{x^*}\\ B\overline{y^*}(1-C) & 0\end{pmatrix}$，Jacobia矩阵的行列式和矩阵的迹分别为：$Det(J|_{(\overline{x^*},\overline{y^*})})=B\overline{x^*y^*}(1-C)>0$，$Tr(J|_{(\overline{x^*},\overline{y^*})})=-2\overline{x^{*2}}+(1-A)\overline{x^*}=\dfrac{1-A-C-AC}{1-C}$。由动力系统稳定性判定的知识[10]可得：当$1-C-AC>0$时，平衡点$Q(\overline{x^*},\overline{y^*})$为系统(5)的不稳定点；当$1-C-AC<0$时，平衡点$Q(\overline{x^*},\overline{y^*})$为系统(5)的稳定焦点或结点。定理1证明完毕。

定理2 当$1-C-AC<0$时，系统(5)从$\overline{R_2^+}$中任一点$p(x_p,y_p)$出发的解有界。

证明 作直线$x=l_1$，$l_1\geqslant\max\{x_p,1\}$，则当$y>0$时，$\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{x=l_1}=[(1-l_1)(x+A)-y]l_1<0$，故当系统(5)的轨线与直线$x=l_1$相遇时，均从直线$x=l_1$的右方穿入左方。作直线$y=l_2$，$l_2\geqslant0$，则当$0<x\leqslant l_1$时，$\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{y=l_2}=Bl_2[(1-C)x-AC]<Bl_2(1-C-AC)<0$。故当系统(5)的轨线与直线$y=l_2$相遇时，均从直线$y=l_2$的上方穿入左方。

由于$x=0$，$y=0$都是系统的轨线，于是由直线$x=0$，$y=0$，$x=l_1y=l_2$可围成区域D，系统(5)从$\overline{R_2^+}$中任一点$p(x_p,y_p)$出发的解只能在该区域内，所以有界。定理2成立。

参考文献：

[1] 林琳，侯林洁. 具有庇护所的Lotka-Volterra型的捕食－食饵系统[J]. 北华大学学报：自然科学版，2012(13)1:19－21.

[2] 帅智圣，苗春梅，张伟鹏，等. 具有庇护所的三种群捕食者－食饵模型[J]. 生物数学学报，2004，16(1):65－71.

[3] 张艳波，王万雄，段永红. 一类具第三类功能反应且食饵具有避难所的捕食系统的分析[J]. 数学的实践与认识，2010(40):149－154.

[4] 徐国明，贾建文. 一类具有避难所的不是系统的分析[J]. 陕西师范大学学报，2007，21(4):4－7.

[5] 周稻祥，朱长荣. 一类具有常数避难所与收获率的捕食－食饵模型的稳定性分析[J]. 重庆理工大学学报：自然科学版，2012，26(12):122－126.

[6] 徐昌进，陈大学. 具有时滞的食饵－捕食者模型的分支问题[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2011(3):43－48.

[7] 帅智圣，苗春梅，张伟鹏，等. 具有庇护所的三种群捕食者－食饵模型[J]. 生物数学学报，2004，28(1):65－71.

[8] 马智慧，李文龙，李自珍，等. 具有已感染者庇护所效应的传染病模型[J]. 兰州大学学报，2008，44(2):111－114.

[9] 陈兰荪. 数学生态学模型与研究方法[M]. 北京：科学出版社，1988.

[10] 马知恩，周义仓. 常微分方程定性与稳定性方法[M]. 北京：科学出版社，2001.

（**责任编辑** 刘 舸）