doi: 10.3969/j. issn. 1674-8425(z). 2016. 12. 026

双层位势问题新的基本解法公式

郭　璇，张耀明

(山东理工大学 理学院，山东 淄博 255049)

摘　　要：基于单层位势和叠加原理的传统的基本解法，在求解某些有限域问题时，虚边界位置的选择会受到一定的限制，在求解某些无限域问题时可能会无解。为此提出了基于双层位势和叠加原理的改进的基本解法，避免了传统基本解法的不足。该方法适合求解任何边值问题，其特点是有限域问题和无限域问题的基本解法公式具有不同的形式。

关　键　词：基本解法；双层位势；位势问题

中图分类号：O241.8　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1674-8425(2016)12-0165-06

A New Method of Fundamental Solution Formulation to Double Layer Potential Problems

GUO Xuan, ZHANG Yao-ming

(School of Mathematics, Shandong University of Technology, Zibo 255049, China)

Abstract: The conventional method of fundamental solution (MFS), based on the single layer potential and the superposition principle, has many shortcomings, for instance, for special interior problems its fictitious boundary location may be limited and for certain exterior problems it may fail. In this paper, a new method of fundamental solution formulation, which is built on the double layer potential and the superposition principle, is developed. The method avoids some disadvantages of the traditional method of fundamental solution and thus is suitable for solving any boundary value problems.

Key words: method of fundamental solution(MFS); double layer potential; potential problems

基本解法(MFS)是由 Kupradze 和 Aleksidze[1] 在20世纪60年代提出的一种著名的边界型数值方法。基本解法的优点是不需要划分网格或者单元，也不需要边界积分，同时避免了边界元法中的奇异性和几乎奇异性，具有程序设计简单、计算速度快、计算精度高等优点，至今已被广泛应用于各

收稿日期：2016-05-27

基金项目：山东省自然科学基金重点资助项目(ZR2010AZ003)

作者简介：郭璇(1992—)，女，硕士研究生，主要从事科学计算与力学研究，E-mail: m18369972890@163.com。

引用格式：郭璇，张耀明. 双层位势问题新的基本解法公式[J]. 重庆理工大学学报(自然科学)，2016(12)：165-170.

Citation format: GUO Xuan, ZHANG Yao-ming. A New Method of Fundamental Solution Formulation to Double Layer Potential Problems[J]. Journal of Chongqing University of Technology(Natural Science), 2016(12): 165-170.

个领域，取得了很好的效果[2-8]。然而，基于单层位势和叠加原理的传统的基本解法具有一定的局限性，如在求解某些有限域问题时，虚边界位置的选择会受到一定的限制，在求解某些无限域问题时可能无解。此外，基本解法的数值解的精度与虚拟边界的选取位置密切相关，距离太近无法避免基本解的奇异性，距离太大有时可能导致线性系统矩阵高度病态，不能求得问题的有效解。虚、实边界之间的“距离选择”一直是一个未能很好解决的问题，一般靠研究者的经验和误差实验进行判断。针对这些情况，文献[9-10]分析了距离选择与问题解的性态之间的关系，结果表明：当问题的解可以解析开拓时，虚、实边界之间的“最大距离”不受限制。文献[11]借鉴等价间接边界积分方程的形式改进了基于单层位势基本解法公式，并对基本解法线性系统矩阵进行了规则化，应用于薄体结构问题的研究，但没有从理论上分析方法的合理性。本文从理论和数值实验两方面对传统基本解法的局限性进行了分析，并在此基础上提出了基于双层位势的基本解法。

1　边值问题

本文假定 Ω 是 R^2 中的一个有界域，Ω^c 是其开补，$\Gamma=\partial\Omega$ 是它们共同的边界。有界域 Ω 上的边值问题是[9]

$$\begin{cases}\nabla^2 u(x)=0, & x\in\Omega\\ u(x)=\bar{u}(x), & x\in\Gamma_u\\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial n}=\bar{q}(x), & x\in\Gamma_q\end{cases}\tag{1}$$

无限域 Ω^c 上的边值问题是

$$\begin{cases}\nabla^2 u(x)=0, & x\in\Omega^c\\ u(x)=\bar{u}(x), & x\in\Gamma_u\\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial n}=\bar{q}(x), & x\in\dot{\Gamma}_q\\ \lim\limits_{|x|\to\infty}|u(x)|=O(1)\end{cases}\tag{2}$$

式(1)～(2)中：∇^2 为拉普拉斯算子；n 为边界外法线；Γ_u,Γ_q 分别是 u 和 $\partial u/\partial n$ 已知的边界。二维位势问题控制方程的基本解为

$$u^*(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\ln r\tag{3}$$

式中 $x=(x_1,x_2)$，$y=(y_1,y_2)$ 分别为场点和源点，$r=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2+y_2)^2}$ 为两点之间的距离。

2　传统的基本解法的局限性

传统基本解法的公式是

$$\begin{cases}u_{MFS}(y)=\sum\limits_{j=1}^{n}c_j u^*(x_j,y)\\ \dfrac{\partial u_{MFS}(y)}{\partial l}=\sum\limits_{j=1}^{n}c_j\dfrac{\partial u^*(x_j,y)}{\partial l}\end{cases}\tag{4}$$

这里 $l=l(y)$ 是在点 y 处的任一方向。

笔者发现：传统的基本解法式(4)不具有普遍适用性。对某些内边值问题，虚边界(虚源位置)的选择受到一定的限制，对于某些外边值问题，基本解法失效。

考虑一个内边值问题：

$$\begin{cases}\Delta u=0 & ,\ \text{in } B_r(0)\\ u(x)=x_1+x_2+1 & ,\ \text{on } \partial B_r(0)\end{cases}\tag{5}$$

这里 $B_r(0)$ 是以坐标原点为中心、半径为 $r<1$ 的圆域，$\partial B_r(0)$ 是 $B_r(0)$ 的边界。显然问题(5)的解析解是 $u(x)=x_1+x_2+1$，于是 $u(0)=1$。现在用基本解式(4)求解问题(5)。假设所选的虚源节点 $x_j(j=1,\cdots,n)$ 位于单位圆周 ∂B_1 上，那么对于基本解法式(4)，无论 $\{a_j\}$ 取何值，总有 $u_{MFS}(0)=0$，因此对于任意的 $r<1$，相应的边值问题(5)的解总不能由基本解式(4)求得，表明虚边界的选择受到一定的限制。

数值结果也表明了这一点。在应用传统基本解式(4)求解问题(5)时，取 $r=1/2$，选择 44 个均布的虚源点位于单位圆周上。表 1 给出了部分边界节点上边界通量 $\partial u/\partial n$ 的数值结果，表 2 给出了内点温度的数值结果。从表 1 和表 2 可看出：无论是内点计算，还是边界点计算，结果都不正确，验证了前面的理论分析。

表 1　边界法向通量的数值结果

x_1	x_2	精确解	数值解
0.498 726 1E+00	0.356 695 9E-01	0.989 821 4E+00	0.197 882 7E+04
0.174 732 1E+00	0.468 474 9E+00	-0.755 749 6E+00	0.250 841 2E+02
-0.353 553 4E+00	0.353 553 4E+00	-0.222 044 6E-15	0.678 118 5E+01
-0.468 474 9E+00	-0.174 732 1E+00	0.755 749 6E+00	0.664 788 5E+01
-0.356 695 9E-01	-0.498 726 1E+00	-0.989 821 4E+00	0.154 501 9E+02
0.438 839 5E+00	-0.239 624 5E+00	0.540 640 8E+00	0.231 442 7E+03

表 2　内点温度的数值结果

x_1	x_2	精确解	数值解
0.000 000 0E+00	0.000 000 0E+00	0.500 000 0E+01	0.725 280 4E-07
0.100 000 0E+00	0.100 000 0E+00	0.500 000 0E+01	-0.148 293 7E+01
0.100 000 0E+00	0.200 000 0E+00	0.497 000 0E+01	0.308 487 0E+00
0.100 000 0E+00	0.300 000 0E+00	0.492 000 0E+01	0.215 913 8E+01
0.100 000 0E+00	0.400 000 0E+00	0.485 000 0E+01	0.373 098 1E+01

现在考虑如下外边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & , \text{ in } \Omega^c \\ u(x) = \bar{u}_0 & , \text{ on } \Gamma \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} |u(x)| = C & , \text{ at } \infty \end{cases} \tag{6}$$

只要 $C\neq 0$,例如 $u(x)=\dfrac{x_1}{x_1^2+x_2^2}+5$,基本解法(4)就无法正确求解。事实上,对于基本解式(4),不难证明:当 $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j = 0$, $\lim\limits_{|y|\to\infty} u_{MFS}(y)\to 0$;当 $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j \neq 0$ 时,$u_{MFS}(y)=O(\ln|y|)(y\to\infty)$。

例如,考虑如下边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & , \text{ in } \Omega^c = R^2 - \overline{B_1(0)} \\ u(x) = \bar{u}_0(x) & , \text{ on } \partial B_1(0) \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} |u(x)| = 5 & , \text{ at } \infty \end{cases} \tag{7}$$

这里 $B_1(0)$ 是中心在原点、半径为 1 的圆域,$\partial B_1(0)$ 是其边界,$\bar{u}_0(x)=\dfrac{x_1}{x_1^2+x_2^2}+5$。

在应用传统基本解式(4)求解问题(7)时,44 个虚源点均布在半径为 0.5 的圆周上。表 3 给出了部分边界节点上边界通量 $\partial u/\partial n$ 的数值结果,表 4 给出了内点温度的数值结果。从表 3 和表 4 可看出:内点和边界点的数值结果都不正确,验证了前面的理论分析。

表 3　内点温度的数值结果

x_1	x_2	精确解	数值解	相对误差
0.100 000 0E+01	0.200 000 0E+01	0.520 000 0E+01	-0.157 082 6E+10	0.302 081 9E+11
0.100 000 0E+01	0.500 000 0E+01	0.503 846 2E+01	-0.317 993 1E+10	0.631 131 4E+11
0.200 000 0E+01	0.200 000 0E+01	0.525 000 0E+01	-0.202 955 3E+10	0.386 581 6E+11
0.200 000 0E+01	0.600 000 0E+01	0.505 000 0E+01	-0.360 037 9E+10	0.712 946 3E+11
0.300 000 0E+01	0.800 000 0E+01	0.504 109 6E+01	-0.418 752 6E+10	0.830 677 8E+11

表4 边界法向通量的数值结果

x_1	x_2	精确解	数值解	相对误差
0.997 452 1E+00	0.713 391 8E-01	0.997 452 1E+00	0.195 201 9E+10	0.195 700 5E+12
0.349 464 2E+00	0.936 949 7E+00	0.349 464 2E+00	0.195 201 8E+10	0.558 574 5E+12
-0.707 106 8E+00	0.707 106 8E+00	-0.707 106 8E+00	0.195 201 8E+10	0.276 057 0E+12
-0.936 949 7E+00	-0.349 464 2E+00	-0.936 949 7E+00	0.195 201 8E+10	0.208 337 5E+12
-0.713 391 8E-01	-0.997 452 1E+00	-0.713 391 8E-01	0.195 201 8E+10	0.273 624 9E+13
0.877 679 0E+00	-0.479 249 0E+00	0.877 679 0E+00	0.195 201 8E+10	0.222 406 8E+12

3 基于双层位势的基本解法

为了避免传统基本解法的不足，本文提出基于双层位势的基本解法。对于内边值问题(1)，基本解法公式是

$$\begin{cases} u(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \dfrac{\partial u^*(x,y_j)}{\partial n_{y_j}} \\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial n_x} = \sum_{j=1}^{n} a_j \dfrac{\partial^2 u^*(x,y_j)}{\partial n_x \partial n_{y_j}} \end{cases} \tag{8}$$

现在应用基于双层位势的基本解法式(8)求解问题(5)，仍取 $r=1/2$。同样地，选择44个虚源点均布于单位圆周 $\partial B_1(0)$ 上。表5给出了内点温度的数值结果，表6给出了部分边界点上的法向通量 $\partial u/\partial n$ 的数值结果。从表5和表6可以看出：无论是内点温度的数值结果还是边界量的数值结果都达到了很高的精度。这表明：基本解式(8)完全避免了传统的基本解式(4)的弊病。

对于外边值问题(2)，基于双层位势的基本解法公式是

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j = 0 \\ u(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \dfrac{\partial u^*(x,y_j)}{\partial n_{y_j}} + C \\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial n_x} = \sum_{j=1}^{n} a_j \dfrac{\partial^2 u^*(x,y_j)}{\partial n_x \partial n_{y_j}} \end{cases} \tag{8}$$

现在应用基本解法式(8)来求解问题(3)。同样地，选择44个虚源点均布于半径为0.5的圆周上。表7给出了内点温度的数值结果，表8给出了部分边界点上的法向通量 $\partial u/\partial n$ 的数值结果。从表7和表8可以看出：无论是内点温度的数值结果还是边界量的数值结果都达到了很高的精度。这表明：基本解式(8)完全地避免了传统的基本解式(4)的弊病。

表5 内点温度的数值结果

x_1	x_2	精确解	数值解	相对误差
0.000 000 0E+00	0.000 000 0E+00	0.500 000 0E+01	0.500 000 0E+01	0.734 308 0E-07
0.100 000 0E+00	0.100 000 0E+00	0.500 000 0E+01	0.500 000 0E+01	0.952 094 4E-07
0.100 000 0E+00	0.200 000 0E+00	0.497 000 0E+01	0.497 000 0E+01	0.688 729 6E-07
0.100 000 0E+00	0.300 000 0E+00	0.492 000 0E+01	0.492 000 0E+01	0.412 057 9E-07
0.100 000 0E+00	0.400 000 0E+00	0.485 000 0E+01	0.485 000 0E+01	0.169 894 3E-07

表 6　边界法向通量的数值结果

x_1	x_2	精确解	数值解	相对误差
0.498 726 1E+00	0.356 695 9E-01	0.989 821 4E+00	0.989 966 8E+00	0.146 869 4E-03
0.174 732 1E+00	0.468 474 9E+00	-0.755 749 6E+00	-0.755 747 7E+00	0.244 725 3E-05
-0.468 474 9E+00	-0.174 732 1E+00	0.755 749 6E+00	0.755 750 0E+00	0.557 618 2E-06
-0.356 695 9E-01	-0.498 726 1E+00	-0.989 821 4E+00	-0.989 820 3E+00	0.117 678 9E-05
0.438 839 5E+00	-0.239 624 5E+00	0.540 640 8E+00	0.540 657 8E+00	0.315 011 9E-04

表 7　内点温度的数值结果

x_1	x_2	精确解	数值解	相对误差
0.100 000 0E+01	0.200 000 0E+01	0.520 000 0E+01	0.520 000 0E+01	0.376 288 1E-07
0.100 000 0E+01	0.500 000 0E+01	0.503 846 2E+01	0.503 846 1E+01	0.404 914 6E-07
0.200 000 0E+01	0.200 000 0E+01	0.525 000 0E+01	0.525 000 0E+01	0.528 438 7E-07
0.200 000 0E+01	0.600 000 0E+01	0.505 000 0E+01	0.505 000 0E+01	0.428 043 2E-07
0.300 000 0E+01	0.800 000 0E+01	0.504 109 6E+01	0.504 109 6E+01	0.433 451 0E-07

表 8　边界法向通量的数值结果

x_1	x_2	精确解	数值解	相对误差
0.997 452 1E+00	0.713 391 8E-01	0.997 452 1E+00	0.997 493 7E+00	0.416 567 2E-04
0.349 464 2E+00	0.936 949 7E+00	0.349 464 2E+00	0.349 464 7E+00	0.151 267 6E-05
-0.707 106 8E+00	0.707 106 8E+00	-0.707 106 8E+00	-0.707 106 6E+00	0.194 904 0E-06
-0.936 949 7E+00	-0.349 464 2E+00	-0.936 949 7E+00	-0.936 949 6E+00	0.128 527 6E-06
-0.713 391 8E-01	-0.997 452 1E+00	-0.713 391 8E-01	-0.713 388 5E-01	0.466 672 8E-05
0.877 679 0E+00	-0.479 249 0E+00	0.877 679 0E+00	0.877 683 9E+00	0.554 611 4E-05

4　结束语

传统的基本解法基于单层位势和叠加原理，具有一定局限性。本文从理论和数值计算两方面进行了分析，提出了基于双层位势和叠加原理的基本解法，可适合于求解任何边值问题。

参考文献：

[1] KUPRADZE V D, ALEKSIDZE M A. The method of functiona1 equations for the approximate solution of certain boundary value prob1ems[J]. USSR Comput. Math. Math. Phys, 1964(4): 82-126.

[2] FAIRWEATHER G, KARAGEORGHIS A. The method of fundamenal solutions for elliptic boundary value problems [J]. Adv Comput Math 1998(9): 69-95.

[3] POULLIKKAS A, KARAGEORGHIS A, Georgiou G. Methods of fundamental solutions for harmonic and biharmonic boundary value problems [J]. Comput. Mech, 1998, 21: 416-423.

[4] GOLBERG M A, CHEN C S. The method of fundamental solutions for potential, Helmholtz and diffusion problems. Boundary integral methods: numerical and mathematical aspects[M]. Boston: WIT Press and Computational Mechanics Publications, 1999.

[5] KITAGAWA T. On the numerical stability of the method of fundamental solution applied to the Dirichlet problem [J]. Jpn J Appl Math, 1988(5): 123-133.

[6] GEORGE S A F, YOUSSEF F R. The method of fundamental solutions applied to 3D elasticity problems using a continuous collocation scheme[J]. Engineering Analysis with boundary elements, 2009, 33: 330 - 341.
[7] BOSELLI F D, OBRIST L, KLEISER. A multilayer method of fundamental solutions for Stokes flow problems[J]. Journal of Computational Physics, 2012, 231: 6139 - 6158.
[8] GUIMARAES S, TELLES J C F. The method of fundamental solutions for fracture mechanics-Reissner's plate application[J]. Engineering Analysis with boundary elements, 2009, 33: 1152 - 1160.
[9] 孙焕纯. 无奇异边界元法[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1999.
[10] 张耀明, 孙焕纯, 杨家新. 虚边界元法的理论分析[J]. 计算力学学报, 2000, 17(1): 56 - 62.
[11] 王发杰, 张耀明, 公颜鹏. 改进的基本解法在薄体各向异性位势 Cauchy 问题中的应用[J]. 工程力学, 2016, 32(2): 18 - 24.

（责任编辑　陈　艳）

（上接第 139 页）

[6] MAAMAR Z W, BADR L K, ELNAFFAR Y S. Messengers for the dynamic management of distributed UDDI registries[C]// Intelligent Networking and Collaborative Systems, INCOS'09. International Conference on, 2009: 24-30.
[7] COLGRAVE J A, GOODWIN R R. External matching in UDDI[C]//Web Services, 2004 Proceedings. [S. l.]: IEEE, 2004: 226 - 233.
[8] BRIAN B M, AMY L S, MICHAEL zur M, et al. The Performance of UDDI Registries[C]//System Sciences, 2007. HICSS 2007. 40th Annual Hawaii International Conference on. 2007: 171c.
[9] TSAI W T, PAUL R, CAO Y Z, et al. Verification of Web services using an enhanced UDDI server[C]//Object-Oriented Real-Time Dependable Systems, 2003. Proceedings of the Eighth International Workshop on. 2003: 131.
[10] Lapisa M A Z, Gehner A S F, NiklausF G. Hidden-hinge micro-mirror arrays made by heterogeneous integration of two mono-crystalline silicon layers[C]//Micro Electro Mechanical Systems (MEMS). [S. l.]: IEEE 24th International Conference. 2011: 696-699.
[11] FORSBERG F R, STEMME N, NIKLAUS F G. Heterogeneous integration technology for combination of different wafer sizes using an expandable handle substrate[C]// Micro Electro Mechanical Systems (MEMS). [S. l.]: IEEE 24th International Conference on. 2011: 268-271.

（责任编辑　刘　舸）

（上接第 164 页）

参考文献：

[1] 夏道行, 吴卓人, 严绍宗, 等. 实变函数论与泛函分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.
[2] 潘承洞, 于秀源. 阶的估计[M]. 济南: 山东科技出版社, 1983.
[3] 彭建华, 田坚, 范崇秀. 阶的估计在判断级数收敛中的应用[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2015, 29(7): 113 - 115.
[4] 年於崇华, 金路. 数学分析: 下册[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000.
[5] 徐利治, 王兴华. 数学分析的方法及例题选讲[J]. 1983.
[6] 菲赫金哥尔茨. 微积分学教程[M]. 北京: 人民教育出版社, 1959.

（责任编辑　陈　艳）