第 35 卷 第 3 期 重 庆 理 工 大 学 学 报(自然科学) 2021 年 3 月
Vol. 35 No. 3 Journal of Chongqing University of Technology(Natural Science) Mar. 2021

doi: 10.3969/j. issn. 1674–8425(z). 2021. 03. 030

本文引用格式:李瑶,卢霁萌. Banach 空间中级数弱无条件收敛性的若干等价刻画[J]. 重庆理工大学学报(自然科学),2021,35(3):230 –236.

Citation format: LI Yao, LU Jimeng. Equivalent Characterizations of Weak Unconditional Convergence of Infinite Series in Banach Spaces[J]. Journal of Chongqing University of Technology(Natural Science),2021,35(3):230 –236.

Banach 空间中级数弱无条件收敛性的若干等价刻画

李 瑶[1],卢霁萌[2]

(1. 天津大学 数学学院, 天津 300072; 2. 南开大学 数学科学学院, 天津 300071)

摘 要:阐述了范数拓扑下赋范空间中无穷级数的无条件收敛性、子列收敛性、有界乘子收敛性、重排收敛性和符号收敛性及对应的 Cauchy 性质的定义及其之间的关系,回顾了级数绝对收敛性与无条件收敛性的关系,阐述了上述 5 种收敛性在弱拓扑下的 Banach 空间中的定义,给出了其相互关系的完整证明,比较了与范数拓扑下的异同。

关 键 词: Banach 空间;无穷级数;Cauchy 条件;弱拓扑;弱无条件收敛性

中图分类号:O177 **文献标识码:**A

文章编号:1674 –8425(2021)03 –0230 –07 **开放科学(资源服务)标识码(OSID):**

Equivalent Characterizations of Weak Unconditional Convergence of Infinite Series in Banach Spaces

LI Yao[1], LU Jimeng[2]

(1. School of Mathematics, Tianjin University, Tianjin 300350, China;
2. School of Mathematical Sciences, Nankai University, Tianjin 300071, China)

Abstract: In the case of Banach spaces under norm topology, definitions of unconditional convergence, subseries convergence, bounded multiplier convergence, reordered convergence and sign convergence and the corresponding Cauchy properties of infinite series were stated. The relationship among the convergences above and the relationship between unconditional convergence and absolute convergence were revisited. The counterparts of the five convergences in Banach spaces under weak topology were provided, as well as a complete proof of their relationship. Similarities of and differences between norm and weak topology were compared.

Key words: Banach spaces; infinite series; Cauchy condition; weak topology; weak unconditional convergence

收稿日期:2020 –04 –29

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51877144)

作者简介:李瑶,女,硕士研究生,主要从事基础数学研究,E-mail:2017233037@ tju. edu. cn;通讯作者 卢霁萌,女,硕士研究生,主要从事泛函分析研究,E-mail:jimenglu@ mail. nankai. edu. cn。

赋范空间中,可在范数拓扑或弱拓扑下定义无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ 的收敛性。这样的收敛性在某些条件下是否具有稳定性,例如换序和有界乘子变换等,即本文讨论的无条件收敛性。这一性质与 Banach 空间的诸多研究领域有着深刻的联系:LEBEDEVA E A 等[1-3]研究了 Hilbert 空间中小波框架展开的无条件收敛性、收敛常数及连续函数小波展开的无条件收敛性;ABAD J L 等[4-6]研究了 Banach 空间中基的随机无条件收敛性、与经典定义之间的联系及向量值 Dirichlet 级数的情况;GOGOLADZE L D 等[7-8]讨论了有界变差函数关于标准正交基的 Fourier 级数和 Hilbert 空间中标准正交基的无条件收敛性;SAAVEDRA F L 等[9-10]讨论了无条件收敛性在矩阵可和性和 Banach 空间概率论中的应用;FERNANDEZ C 等[11]研究了无条件收敛乘子;KARAKUS M 等[12-13]分别推广了几乎收敛性和研究了算子值级数、向量值乘子的几乎可和性及求和算子的弱紧性;FERNANDEZ C 等[14]证明了 Hilbert 空间中的无条件可和序列可被分解为一列平方可和的数列与一个 Bessel 序列的乘积;SEEGER A 等[15]研究了以 Harr 系统为无条件基的 Sobolev 空间中的 Harr 投影数及无条件收敛性等。

本文中,假定 $(X,\|\cdot\|)$ 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的 Banach空间. X^* 是 X 上有界线性泛函全体按算子范数所成的 Banach 空间;S_X 和 B_X 分别表示 X 的单位球面 $\{x \in X: \|x\| = 1\}$ 和闭单位球 $\{x \in X: \|x\| \leqslant 1\}$;记 $P_f(\mathbf{N})$ 是自然数集 $\mathbf{N}$ 的全体有限子集(含空集)构成的集族;$\operatorname{sgn}(\cdot)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的符号函数,其定义为

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

若部分和序列 $\left(s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\right)_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中的 Cauchy 列,则称级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ 满足 Cauchy 条件或 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ 是 Cauchy 级数。若 π 是自然数集 $\mathbf{N}$ 到自身的一个双射,则称其为 $\mathbf{N}$ 的一个重排。级数的无条件 Cauchy 性质等及对应的收敛性有如下定义[16]。

定义 1　X 是赋范空间,$(x_i)_{i=1}^{\infty}$ 是 X 中的序列。

(i) 称 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ 是无条件 Cauchy(相应地,无条件收敛)级数,若(相应地,$\exists x \in X$ 满足)$\forall \varepsilon > 0$,$\exists F_0 \in P_f(\mathbf{N})$,使得 $F \in P_f(\mathbf{N})$ 且 $F \cap F_0 = \varnothing$ 时,有 $\left\| \sum_{i \in F} x_i \right\| < \varepsilon$(相应地,当 $F \supseteq F_0$ 时,$\left\| \sum_{i \in F} x_i - x \right\| < \varepsilon$)。

(ii) 称 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ 是子列 Cauchy(相应地,子列收敛)级数,若对 $\mathbf{N}$ 中任意递增数列 $(i_k)_{k=1}^{\infty}$,级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_{i_k}$ 满足 Cauchy 条件(相应地,在 X 中收敛)。

(iii) 称 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ 是有界乘子 Cauchy(相应地,有界乘子收敛)级数,若对 $\mathbf{R}$ 中任意有界序列 $(a_i)_{i=1}^{\infty}$,$\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ 满足 Cauchy 条件(相应地,在 X 中收敛)。

(iv) 称 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ 是重排 Cauchy(相应地,重排收敛)级数,若对 $\mathbf{N}$ 的任意重排 π,$\sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)}$ 满足 Cauchy 条件(相应地,在 X 中收敛)。

(v) 称 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ 是符号 Cauchy(相应地,符号收敛)级数,若对任意只取值于 $\{1, -1\}$ 的序列 $(\varepsilon_i)_{i=1}^{\infty}$,$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i x_i$ 满足 Cauchy 条件(相应地,在 X 中收敛)。

集族 $P_f(\mathbf{N})$ 在集合的包含关系下是一个有向集,记为 $(P_f(\mathbf{N}), \subseteq)$。若 $F \in P_f(\mathbf{N})$,记 $s_F = \sum_{i \in F} x_i$,则 $\{s_F: F \in P_f(\mathbf{N})\}$ 是 X 中的网,定义 1(i) 中的收敛即 $\{s_F: F \in P_f(\mathbf{N})\}$ 网收敛于 x。记 $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$,易见通常的序列(特别地,$\{s_n: n \in \mathbf{N}\}$)是一种特殊形式的网,故 $\{s_F: F \in P_f(\mathbf{N})\}$ 的网收敛蕴涵 $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ 的序列收敛,即级数的无条件收敛性蕴涵收敛性[17-18]。

定理 1

（i）若 X 是赋范空间，定义 1 中的 5 种 Cauchy 性质等价。

（ii）若 X 是赋范空间，定义 1 中的 5 种收敛性质有如下关系：有界乘子收敛⇒符号收敛⇔子列收敛⇒无条件收敛⇔重排收敛。

（iii）若 X 是 Banach 空间，定义 1 中的五种收敛性质等价。

命题 1 X 是赋范空间，$(x_i)_{i=1}^{\infty}$ 是 X 中的序列。

（i）若 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ 是无条件 Cauchy 级数且收敛于 $x \in X$，则 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ 无条件收敛于 x。

（ii）若 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ 是重排收敛的，则对 $\mathbf{N}$ 的任意重排 π，$\sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)}$ 收敛于同一极限。

以下 2 个定理说明了 Banach 空间中级数的无条件收敛性与绝对收敛性的关系，其中 Dvoretsky-Rogers 定理在[19]Chapter VI 中有详细讨论。

定理 2

（i）Banach 空间中，级数的绝对收敛性蕴涵无条件收敛性。

（ii）若$(X,\|\cdot\|)$是有限维空间，则 X 中级数的无条件收敛性与绝对收敛性等价。

定理（Dvoretsky-Rogers） 每个无限维 Banach 空间中都存在无条件收敛但不绝对收敛的级数。

若对任意 $f \in X^*$，$(f(x_i))_{i=1}^{\infty}$ 在 $\mathbf{R}$ 中收敛，由共鸣定理知$(\|x_i\|)_{i=1}^{\infty}$有界。定义

$$x^{**}: X^* \to \mathbf{R},\ x^{**}(f) = \lim_{i\to\infty} f(x_i),$$

易见

$$|x^{**}(f)| = \lim_{i\to\infty}|f(x_i)| = \lim_{i\to\infty}\inf|f(x_i)| \leqslant \lim_{i\to\infty}\inf\|f\|\cdot\|x_i\|$$

即 $\sup\limits_{f\in X^*}\dfrac{|x^{**}(f)|}{\|f\|} \leqslant \lim\limits_{i\to\infty}\inf x_i$，故 $x^{**} \in X^{**}$。但当 X 不是自反空间，即 X 到 X^{**} 的典范映射 J 不是满射时，不能保证存在 $x \in X$，使得 $f(x) = x^{**}(f)$ 对任意 $f \in X^*$ 都成立，即 $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ 的弱极限未必存在。因此不再讨论 X 中级数的相关弱 Cauchy 性质，直接给出弱无条件收敛的定义。

定义 2 X 是 Banach 空间，$(x_i)_{i=1}^{\infty}$ 是 X 中的序列。

（i）称 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ 弱无条件收敛，若 $\exists x \in X$ 满足 $\forall f \in X^*$，$\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)$ 无条件收敛于 $f(x)$。

（ii）称 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ 弱子列收敛，若对 $\mathbf{N}$ 中任意递增数列 $(i_k)_{k=1}^{\infty}$，$\sum_{k=1}^{\infty} x_{i_k}$ 在 X 中弱收敛。

（iii）称 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ 弱有界乘子收敛，若对任意有界实数列 $(a_i)_{i=1}^{\infty}$，$\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ 在 X 中弱收敛。

（iv）称 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ 弱重排收敛，若对自然数集的任意重排 π，$\sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)}$ 在 X 中弱收敛。

（v）称 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ 弱符号收敛，若对任意取$\{1,-1\}$ 的序列 $(\varepsilon_i)_{i=1}^{\infty}$，$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i x_i$ 在 X 中弱收敛。

为了完整证明上述 5 种弱收敛性质之间的关系，首先需要如下几个结论。

命题 2 X 是赋范空间，$1 \leqslant j \leqslant m$，$(x_i^{(j)})_{i=1}^{\infty}$ 是 X 中的序列，且 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^{(j)}$ 收敛于 $x_j \in X$。记 $F = \{1,2,\cdots,m\}$，映射 $\theta: F\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 满足：

1）θ 是双射；

2）对每个 j，当 $i_1 < i_2$ 时，$\theta(j,i_1) < \theta(j,i_2)$。

令 $x'_{\theta(j,i)} = x_i^{(j)}$，则 $\sum_{\theta(j,i)=1}^{\infty} x'_{\theta(j,i)}$ 收敛于 $\sum_{j=1}^{m} x_j$。

证明 由 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^{(j)}$ 收敛于 x_j 知 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，当 $n \geqslant N$ 时，$\sum_{i=1}^{n} x_i^{(j)} - x_j < \dfrac{\varepsilon}{m}(\forall 1 \leqslant j \leqslant m)$。

任取 $n \in \mathbf{N}$，令 $n_j = \max\limits_{1\leqslant\theta(j,i)\leqslant n} i$，$A_n^{(j)} = \{x_i^{(j)}: i \in \mathbf{N}\} \cap \{x'_{\theta(j,i)}: 1 \leqslant \theta(j,i) \leqslant n\}$，则有 $A_n^{(j)} = \{x_i^{(j)}: 1 \leqslant i \leqslant n_j\}$（一方面，若 $x_i^{(j)} \in A_n^{(j)}$，则 $1 \leqslant \theta(j,i) \leqslant n$，由 n_j 定义知 $i \leqslant n_j$，即 $x_i^{(j)} \in \{x_i^{(j)}: 1 \leqslant i \leqslant n_j\}$；另一方面，当 $1 \leqslant i \leqslant n_j$ 时，由 θ 关于第二变元递增知

$\theta(j,i)\leqslant\theta(j,n_j)\leqslant n$,即 $x_i^{(j)}\in A_n^{(j)}$)。

记 $N_0=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\theta(j,N)$,则当 $n>N_0$ 时,$n_j=\max\limits_{1\leqslant\theta(j,i)\leqslant n}i\geqslant\max\limits_{1\leqslant\theta(j,i)\leqslant N_0}i\geqslant N$,此时

$$\left\|\sum_{\theta(j,i)=1}^{n}x'_{\theta(j,i)}-\sum_{j=1}^{m}x_j\right\|=\left\|\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i\in A_n^{(j)}}x_i^{(j)}-x_j\Big)\right\|=$$

$$\left\|\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n_j}x_i^{(j)}-x_j\Big)\right\|<\frac{\varepsilon}{m}\cdot m=\varepsilon$$

从而 $\sum\limits_{\theta(j,i)=1}^{\infty}x'_{\theta(j,i)}$ 收敛于 $\sum\limits_{j=1}^{m}x_j$。

若将序列$(x_i)_{i=1}^{\infty}$拆分为有限个指标集互不相交的子列,且原序列的每一项皆属于某个子列,显然这些子列满足命题2 中的条件,故若 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i$ 可拆分为有限个收敛的子级数,那么原级数收敛于这些子级数之和。

推论 1 设$(x_i)_{i=1}^{\infty}$是赋范空间 X 中的序列,$1\leqslant j\leqslant m$,$(x_i^{(j)})_{i=1}^{\infty}$是$(x_i)_{i=1}^{\infty}$的子列且满足:

1) $\bigcup\limits_{j=1}^{m}\{x_i^{(j)}:i\in\mathbf{N}\}=\{x_i:i\in\mathbf{N}\}$;

2) 当$1\leqslant j\neq l\leqslant m$ 时,子列$(x_i^{(j)})_{i=1}^{\infty}$与$(x_i^{(l)})_{i=1}^{\infty}$在原序列中的指标集交集为空;

3) $x_i^{(j)}$ 在原序列$(x_i)_{i=1}^{\infty}$中的指标递增;

4) $\exists x'_j\in X$,使得 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i^{(j)}$ 收敛于 x'_j,则 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i$ 收敛于 $\sum\limits_{j=1}^{m}x'_j$。

命题 3 设 $X=(l^{\infty},\|\cdot\|_{\infty})$,记 X_0 是全体只取有限个值的实数列(按通常定义的序列加法和数乘)构成的线性空间,则$(X_0,\|\cdot\|_{\infty})$在 X 中稠密。

证明 设 $x=(a_i)_{i=1}^{\infty}\in X$,则 $\exists M>0$,使得 $|a_i|\leqslant M,i\in\mathbf{N}$。$\forall\varepsilon>0$,$\exists N$ 使得$\dfrac{2M}{N}<\varepsilon$。

令 $b_n=-M+n\cdot\dfrac{2M}{N}(0\leqslant n\leqslant N)$,则 $[-M,M]=\bigcup\limits_{n=1}^{N}[b_{n-1},b_n]$,从而对每个 $i\in\mathbf{N}$,存在 $1\leqslant n(i)\leqslant N$ 满足 $b_{n(i)-1}\leqslant a_i\leqslant b_{n(i)}$,此时有

$$|a_i-b_{n(i)}|\leqslant|b_{n(i)-1}-b_{n(i)}|=\frac{2M}{N}<\varepsilon$$

故取 $y=(b_{n(i)})_{i=1}^{\infty}$,易见

$$\{b_{n(i)}:i\in\mathbf{N}\}\subset\{b_n:0\leqslant n\leqslant N\}$$

从而 $y\in X_0$,且 $\|y-x\|_{\infty}<\varepsilon$,故 X_0 在 X 中稠密。

命题 4 $(X,\|\cdot\|_X)$,$(Y,\|\cdot\|_Y)$是 2 个赋范空间,$T\in B(X,Y)$,X_0 是 X 的一个稠密子空间,则 $TX\subset\overline{T(X_0)}$。

证明 因 X_0 在 X 中稠密,故 $\forall x\in X$,存在 X_0 中的序列$(x_i)_{i=1}^{\infty}$,使得 $\lim\limits_{i\to\infty}x_i=x$,又因为 $T\in B(X,Y)$,故 $\lim\limits_{i\to\infty}Tx_i=Tx$,从而 $TX\subset\overline{T(X_0)}$。

定理 3 X 是 Banach 空间,则定义 2 中的收敛方式有如下关系:

弱子列收敛(ii)⇔弱符号收敛(v)⇔弱有界乘子收敛(iii)⇒弱无条件收敛(i)⇔弱重排收敛(iv)。

证明 (v)⇒(ii)设 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i$ 是弱符号收敛级数,$(i_k)_{k=1}^{\infty}$是一列递增的自然数。定义

$$\varepsilon'_i=1(i\in\mathbf{N}),\varepsilon''_i=\begin{cases}1,i\in\{i_k:k\in\mathbf{N}\}\\-1,i\notin\{i_k:k\in\mathbf{N}\}\end{cases}$$

设

$$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon'_ix_i\xrightarrow{w}x_1,\sum_{i=1}^{n}\varepsilon''_ix_i\xrightarrow{w}x_2(n\to\infty)$$

则 $\forall f\in X^*$,

$$\sum_{k=1}^{m}f(x_{i_k})=\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{i_m}f(\varepsilon'_ix_i)+\sum_{i=1}^{i_m}f(\varepsilon''_ix_i)\Big)\to$$

$$\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))(m\to\infty)$$

即$\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_{i_k}$弱收敛于$\dfrac{x_1+x_2}{2}$。

(ii)⇒(v) 设 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i$ 是弱子列收敛级数,$\varepsilon_i=\pm1(i\in\mathbf{N})$。令

$$\{x_i^{(1)}:i\in\mathbf{N}\}=\{x_i:\varepsilon_i=1,i\in\mathbf{N}\},$$
$$\{x_i^{(2)}:i\in\mathbf{N}\}=\{x_i:\varepsilon_i=-1,i\in\mathbf{N}\}$$

且 $x_i^{(1)},x_i^{(2)}$ 在原序列$(x_i)_{i=1}^{\infty}$中指标递增。设

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^{(1)}\xrightarrow{w}x'_1,\sum_{i=1}^{n}x_i^{(2)}\xrightarrow{w}x'_2(n\to\infty)$$

那么 $\forall f\in X^*$,由推论 1 知

$$\sum_{i=1}^{n}f(\varepsilon_ix_i)\to f(x'_1)-f(x'_2)(n\to\infty)$$

即 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\varepsilon_ix_i$ 弱收敛于 $x'_1-x'_2$。

(iii)⇒(v)显然

(v)⇒(iii) 设 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ 弱符号收敛。若 $f \in X^*$，令 $\varepsilon_i = \mathrm{sgn}\, f(x_i)$，则 $\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)|$ 收敛，即 $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)$ 绝对收敛。定义

$$T:\ X^* \to l^1,\ T(f) = (f(x_i))_{i=1}^{\infty} (f \in X^*)$$

若在 X^* 中 $f_n \to f(n\to\infty)$ 且在 l^1 中

$$T(f_n) = (f_n(x_i))_{i=1}^{\infty} \to (\alpha_i)_{i=1}^{\infty} (n \to \infty)$$

由 l^1 中范数定义易见

$$f_n(x_i) \to \alpha_i (n \to \infty)$$

又由 $f_n \to f$ 知对每个 i 有

$$f_n(x_i) \to f(x_i)(n \to \infty)$$

故 $f(x_i) = \alpha_i$，即 $T(f) = (\alpha_i)_{i=1}^{\infty}$，从而 T 是闭算子，由闭图像定理知 T 为有界线性算子。考虑 $T^*: l^\infty \to X^{**}$，由共轭算子定义有

$$T^*((a_i)_{i=1}^{\infty})(f) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f(x_i)$$

其中 $f \in X^*$，$(a_i)_{i=1}^{\infty} \in l^\infty$。按命题 3 中的方式定义 l^∞ 的稠密子空间 X_0，若 $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in X_0$，则存在 $\{b_j: 1 \leqslant j \leqslant n\} \subset \mathbf{R}$，使得 $\{a_i: i \in \mathbf{N}\} = \{b_j: 1 \leqslant j \leqslant n\}$。对每个 $1 \leqslant j \leqslant n$，令

$$\{x_i^{(j)}:\ i \in \mathbf{N}\} = \{x_i:\ a_i = b_j, i \in \mathbf{N}\}$$

且 $x_i^{(j)}$ 在原序列中指标递增，由已经证明的弱符号收敛与弱子列收敛的等价性知 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^{(j)}$ 在 X 中弱收敛，记其弱极限为 x'_j。

$\forall f \in X^*$，易见 $(b_j f(x_i^{(j)}))_{i=1}^{\infty} (1 \leqslant j \leqslant n)$ 作为序列 $(a_i f(x_i))_{i=1}^{\infty}$ 的 n 个子列满足推论 1 中的条件，故 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f(x_i)$ 收敛于 $\sum_{j=1}^{n} f(x'_j)$，即 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ 弱收敛于 $\sum_{j=1}^{n} x'_j$，故 $T^*(X_0) \subset X$。因 X 完备，在典范映射下 X 可视为 X^{**} 的闭子空间，从而由命题 4，

$$T^*(l^\infty) \subset \overline{T^*(X_0)} \subset \overline{X} = X$$

亦即对任意有界实数列 $(a_i)_{i=1}^{\infty}$，存在 $x \in X$，使得 $\forall f \in X^*$，

$$T^*((a_i)_{i=1}^{\infty})(f) = f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} f(a_i x_i)$$

即 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ 弱收敛于 x。

(v)⇒(i) 设 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ 弱符号收敛，由 $(v)\Rightarrow(iii)$ 知 $\forall f \in X^*$，$\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)$ 绝对收敛，由定理 2(i) 知 $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)$ 是无条件 Cauchy 级数。设 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ 弱收敛于 $x \in X$，当 $f \in X^*$ 时，

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \to f(x)(n \to \infty)$$

由命题 1(i) 知 $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)$ 无条件收敛于 $f(x)$，即 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ 是弱无条件收敛级数。

(i)⇒(iv) 设 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ 弱无条件收敛于 $x \in X$，即 $\forall f \in X^*$，$\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)$ 无条件收敛于 $f(x)$，由命题 1(ii)，对 $\mathbf{N}$ 的重排 π，$\sum_{i=1}^{\infty} f(x_{\pi(i)})$ 收敛于 $f(x)$，即 $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)}$ 弱收敛于 x。

(iv)⇒(i) 设 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ 是弱重排收敛级数，则对 $\mathbf{N}$ 的任意重排 π，$\sum_{i=1}^{\infty} f(x_{\pi(i)})$ 收敛，即 $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)$ 重排收敛，由定理 1(iii)，$\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)$ 是无条件 Cauchy 级数。设 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ 弱收敛于 $x \in X$，则当 $f \in X^*$ 时，$\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)$ 收敛于 $f(x)$，由命题 1(i) 知 $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)$ 无条件收敛于 $f(x)$，即 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ 弱无条件收敛于 x。

类似于范数拓扑下的情况（命题 1(ii)），若 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ 是弱重排收敛的，则对 $\mathbf{N}$ 的任意重排 π，$\sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)}$ 弱收敛于同一极限；但与范数拓扑不同的是，弱拓扑下 Banach 空间中级数的子列收敛性严格强于无条件收敛性。

例 1 考虑 $X = (c_0, \|\cdot\|_\infty)$。

记 $e_i = (0,\cdots,0,\underset{\text{第}i\text{个}}{1},0,0,\cdots)$，$i \in \mathbf{N}$。

令 $x_1=e_1, x_i=e_i-e_{i-1}(i\geqslant 2)$,记 $s_n=\sum_{i=1}^{n}e_i=e_n$。若 $f\in c_0^*$,则存在 $(\alpha_i)_{i=1}^{\infty}\in l^1$,对 $x=(a_i)_{i=1}^{\infty}\in c_0$ 有 $f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i a_i$。此时

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)|\leqslant 2\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|<\infty\ (n\in\mathbf{N}),$$

故 $\sum_{i=1}^{\infty}f(x_i)$ 绝对收敛,由定理2(ii),$\sum_{i=1}^{\infty}f(x_i)$ 是无条件 Cauchy 级数,且易见 $f(s_n)=\alpha_n\to 0(n\to\infty)$,由命题1(i)知级数 $\sum_{i=1}^{\infty}f(x_i)$ 无条件收敛于0,由 f 的任意性,$\sum_{i=1}^{\infty}x_i$ 弱无条件收敛于0。但考虑子级数 $\sum_{i=1}^{\infty}x_{2i}$。记 $s'_n=\sum_{i=1}^{n}x_{2i}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^i e_i$, $f_i\in c_0^*=l^1$ 满足

$$\forall x=(a_i)_{i=1}^{\infty}\in c_0, f_i(x)=a_i$$

若 $s'_n\xrightarrow{w}x_0=(b_i)_{i=1}^{\infty}\in c_0(n\to\infty)$,则 $f_i(s'_n)\to b_i(n\to\infty)$,即 $b_i=(-1)^i(i\in\mathbf{N})$,此与 $(b_i)_{i=1}^{\infty}\in c_0$ 矛盾。故 $\sum_{i=1}^{\infty}x_i$ 是弱无条件收敛但非弱子列收敛的。

定理4[20]　*RYAN R A* 提出了当 $f\in X^*$ 时,$\sum_{i=1}^{\infty}f(x_i)$ 无条件收敛的一个等价条件。给出一个新的证明,为此需要如下引理。

引理1　X 是赋范空间,$F\in P_f(\mathbf{N})$,$\{x_i: i\in F\}$ 是 X 的有限子集,则

$$\sup_{\varepsilon_i=\pm1,\ i\in F}\left\|\sum_{i\in F}\varepsilon_i x_i\right\|=\sup_{f\in S_{X^*}}\sum_{i\in F}|f(x_i)|=\sup_{|a_i|\leqslant1, i\in F}\left\|\sum_{i\in F}a_i x_i\right\|$$

证明　显然有

$$\sup_{\varepsilon_i=\pm1, i\in F}\left\|\sum_{i\in F}\varepsilon_i x_i\right\|\leqslant\sup_{|a_i|\leqslant1, i\in F}\left\|\sum_{i\in F}a_i x_i\right\|$$

若 $|a_i|\leqslant1, i\in F$,由 Hahn-Banach 定理,$\exists f\in S_{X^*}$,使得

$$\left\|\sum_{i\in F}a_i x_i\right\|=f\left(\sum_{i\in F}a_i x_i\right)=\sum_{i\in F}a_i f(x_i)\leqslant$$
$$\sum_{i\in F}|a_i||f(x_i)|\leqslant\sum_{i\in F}|f(x_i)|\leqslant\sup_{f\in S_{X^*}}\sum_{i\in F}|f(x_i)|$$

故 $\sup_{|a_i|\leqslant1, i\in F}\|\sum_{i\in F}a_i x_i\|\leqslant\sup_{f\in S_{X^*}}\sum_{i\in F}|f(x_i)|$。

$\forall f\in X^*$,令 $\varepsilon_i=\mathrm{sgn}f(x_i)$,则

$$\sum_{i\in F}|f(x_i)|=\sum_{i\in F}f(\varepsilon_i x_i)=f\left(\sum_{i\in F}\varepsilon_i x_i\right)\leqslant$$
$$\left\|\sum_{i\in F}\varepsilon_i x_i\right\|\leqslant\sup_{\varepsilon_i=\pm1, i\in F}\left\|\sum_{i\in F}\varepsilon_i x_i\right\|$$

故 $\sup_{f\in S_{X^*}}\sum_{i\in F}|f(x_i)|\leqslant\sup_{\varepsilon_i=\pm1, i\in F}\|\sum_{i\in F}\varepsilon_i x_i\|$。

定理5　X 是 Banach 空间,$(x_i)_{i=1}^{\infty}$ 是 X 中的序列。$\forall f\in X^*$,$\sum_{i=1}^{\infty}f(x_i)$ 无条件收敛,当且仅当若 $(a_i)_{i=1}^{\infty}\in c_0$,则 $\sum_{i=1}^{\infty}a_i x_i$ 收敛。

证明　设当 $f\in X^*$ 时,$\sum_{i=1}^{\infty}f(x_i)$ 无条件收敛,由定理2(ii)知 $\sum_{i=1}^{\infty}f(x_i)$ 绝对收敛。定义算子 $T: X^*\to l^1, f\mapsto(f(x_i))_{i=1}^{\infty}$,由定理3(v)⇒(iii)知 $T\in B(X^*, l^1)$,故若 $f\in B_{X^*}$,

$$\|Tf\|=\sum_{i=1}^{\infty}|f(x_i)|\leqslant\|T\|\cdot\|f\|\leqslant\|T\|$$

考虑 $(a_i)_{i=1}^{\infty}\in c_0$,记 $b_i=a_i/\frac{\varepsilon}{\|T\|}(i\in\mathbf{N})$。

$$\forall\varepsilon>0, \exists N, 当\ i>N\ 时, a_i\leqslant\frac{\varepsilon}{\|T\|}, |b_i|\leqslant1。$$

记 $F_0=\{1,2,\cdots,N\}\in P_f(\mathbf{N})$,若 $F\in P_f(\mathbf{N})$,$F_0\cap F=\varnothing$(即 $\min_{i\in F}i>N$),

$$\left\|\sum_{i\in F}a_i x_i\right\|=\frac{\varepsilon}{\|T\|}\left\|\sum_{i\in F}b_i x_i\right\|\leqslant$$
$$\frac{\varepsilon}{\|T\|}\sup_{|b_i|\leqslant1, i\in F}\left\|\sum_{i\in F}b_i x_i\right\|\overset{引理1}{=\!=}$$
$$\frac{\varepsilon}{\|T\|}\sup_{f\in B_{X^*}}\sum_{i\in F}|f(x_i)|\leqslant$$
$$\frac{\varepsilon}{\|T\|}\sup_{f\in B_{X^*}}\sum_{i=1}^{\infty}|f(x_i)|\leqslant\frac{\varepsilon}{\|T\|}\cdot\|T\|=\varepsilon$$

故 $\sum_{i=1}^{\infty}a_i x_i$ 是无条件 Cauchy 级数,从而收敛。

设当 $(a_i)_{i=1}^{\infty}\in c_0$ 时,有 $\sum_{i=1}^{\infty}a_i x_i$ 收敛。固定 $f\in X^*$,定义

$$T_n: c_0\to X, (a_i)_{i=1}^{\infty}\mapsto\sum_{i=1}^{n}a_i x_i$$

易见对任意 n,$T_n\in B(c_0, X)$,且对每个 $\omega=(a_i)_{i=1}^{\infty}$ 都有 $(T_n\omega)_{n=1}^{\infty}$ 收敛。定义

$$T: c_0\to X, T\omega=\lim_{n\to\infty}T_n\omega$$

则由共鸣定理知 $\exists M$,使得

$$\|T\| \leqslant \lim_{n\to\infty}\inf \|T_n\| \leqslant \sup_{n\in\mathbf{N}} \|T_n\| \leqslant M$$

当 $f\in X^*$ 时,令 $a_i = \operatorname{sgn} f(x_i)\ (i\in\mathbf{N})$, $\omega_n = (a_1, a_2, \cdots a_n, 0, 0, \cdots) \in c_0\ (n\in\mathbf{N})$,则 $\|\omega_n\| = 1$,且

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)| = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = f(T\omega_n) \leqslant \|f\|\cdot\|T\|\cdot\|\omega_n\| = \|f\|\cdot\|T\|$$

故 $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)$ 绝对收敛,由定理4(i),$\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)$ 无条件收敛。

参考文献:

[1] LEBEDEVA E A. Unconditional convergence for wavelet frame expansions[J]. Journal of Mathematical Sciences (United States),2018,234(3):357－361.

[2] BEMROSE T,CASAZZA P G,LYNCH R G. The unconditional constant for Hilbert space frame expansions[J]. Linear Algebra and Its Applications,2014,521:1－18.

[3] FUKUDA N,KINOSHITA T,SUZUKI T. On the unconditional convergence of wavelet expansions for continuous functions[J]. International Journal of Wavelets,Multiresolution and Information Processing,2016,14(1):1－18.

[4] ABAD J L,TRADACETE P. Bases of random unconditional convergence in Banach spaces[J]. Transactions of the American Mathematical Society,2016,368(12):9001－9032.

[5] ASTASHKIN S V,CURBERA G P. Random unconditional convergence and divergence in Banach spaces close to L1[J]. Revista Matemática Complutense,2018,31(2):351－377.

[6] CARANDO D,MARCECA F,SCOTTI M,et al. Random unconditional convergence of vector-valued Dirichlet series[J]. Journal of Functional Analysis,2019,277(9):3156－3178.

[7] GOGOLADZE L D,TSAGAREISHVILI V S. Unconditional convergence of Fourier series for functions of bounded variation[J]. Siberian Mathematical Journal,2018,59(1):65－72.

[8] OLEJNIK J. On unconditional convergence of orthogonal fields[J]. Acta Mathematica Hungarica,2015,145(2):516－530.

[9] SAAVEDRA F L,ROSA M P R,SALA A. Orlicz－Pettis theorem through summability methods[J]. Mathematics,2019,7(10):895.

[10] LI D,QUEFFÉLEC H. Introduction to Banach spaces:analysis and probability Vol. 2[M]. University of Cambridge:Cambridge University Press,2018.

[11] FERNANDEZ C,GALBIS A,PRIMO E. Some remarks on unconditionally convergent multipliers. 2017 International conference on sampling theory and applications (SampTA). IEEE,2017:196－198.

[12] KARAKUS M,BASAR F. A generalization of almost convergence,completeness of some normed spaces with wuC series and a version of Orlicz-Pettis theorem[J]. Revista de la real academia de ciencias exactas,físicas y naturales. Serie A. Matemáticas,2019,113(4):3461－3475.

[13] KARAKUS M,BASAR F. Operator valued series,almost summability of vector valued multipliers and (weak) compactness of summing operator[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2020, 484(1),123651.

[14] FERNANDEZ C,GALBIS A,PRIMO E. Unconditionally convergent multipliers and Bessel sequences[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2017,455(1):389－395.

[15] SEEGER A,ULLRICH T. Haar projection numbers and failure of unconditional convergence in Sobolev spaces[J]. Mathematische Zeitschrift,2017,285(1－2):91－119.

[16] FABIAN M,HABALA P,HAJEK P,et al. Banach space theory[M]. New York:Springer,2011.

[17] CONWAY J B. A course in functional analysis[M]. 2nd ed. New York:Springer,1985.

[18] HEIL C. A basis theory primer[M]. Expanded ed. New York:Springer,2011.

[19] DIESTEL J. Sequences and series in Banach spaces[M]. New York:Springer,1984.

[20] RYAN R A. Introduction to tensor products of Banach spaces[M]. London:Springer,2002.

(责任编辑　符有梅)