### 基于模型预测控制的车辆横纵向跟踪控制

邓国红, 肖皓鑫, 韩龙海, 吴鹏飞, 张勇, 覃亮

#### 引用本文:

邓国红, 肖皓鑫, 韩龙海, 等. 基于模型预测控制的车辆横纵向跟踪控制[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2021, 35(11): 18-26,57.

### 相似文章推荐(请使用火狐或IE浏览器查看文章)

Similar articles recommended (Please use Firefox or IE to view the article)

### 智能车辆弯道换道路径规划算法与跟踪控制

Lane Changing Path Planning Algorithm and Tracking Control of Intelligent Vehicles on Curved Roads 重庆理工大学学报(自然科学). 2021, 35(3): 18–28 https://doi.org/10.3969/j.issn.1674–8425(z).2021.03.003

### 基于人-车-路闭环系统的路径跟踪模型预测控制

Model Predictive Control of Path Tracking Based on Human-Vehicle-Road Closed-Loop System 重庆理工大学学报(自然科学). 2020, 34(5): 35-42 https://doi.org/10.3969/j.issn.1674-8425(z).2020.05.005

### 考虑动力学约束的智能车辆路径跟踪控制研究

Research on Intelligent Vehicle Routing Control System Considering Dynamic Constraints 重庆理工大学学报(自然科学). 2018, 32(8): 58–63,87 https://doi.org/10.3969/j.issn.1674–8425(z).2018.08.009

### 智能车辆路径跟踪横向混合控制器设计

Mixed Lateral Controller Design for Path Tracking of Intelligent Vehicle 重庆理工大学学报(自然科学). 2018, 32(11): 7–14 https://doi.org/10.3969/j.issn.1674–8425(z).2018.11.002

### 基于预瞄的智能车辆路径跟踪控制研究

Research on Path-Following Control of Intelligent Vehicles Based on Preview Model 重庆理工大学学报(自然科学). 2017, 31(3): 27–33 https://doi.org/10.3969/j.issn.1674–8425(z).2017.03.004



## 重慶程2大學 学报(自然科学)

Journal of Chongqing University of Technology (Natural Science)

2021 年第 35 卷第 11 期 Vol. 35 No. 11 2021

doi: 10.3969/j.issn.1674-8425(z).2021.11.003

# 基于模型预测控制的车辆横纵向跟踪控制

邓国红1a,肖皓鑫1b,韩龙海1b,吴鹏飞1b,张 勇1b,覃 亮1b,2

(1. 重庆理工大学 a. 机械工程学院; b. 车辆工程学院, 重庆 400054; 2. 重庆大江智防特种装备有限公司, 重庆 401320)

摘 要:在车辆进行换道行为时,决策模型的结果不仅取决于车辆横向位置的变化,还与纵向的速度变化相关。为提高智能车辆在换道时的横向和纵向跟踪能力,设计了一种横向和纵向联合模型预测控制器,模型中采用前轮转角和纵向加速度2个控制量,使车辆在对横向位置进行跟踪时也能考虑到纵向速度的变化。分别建立横向运动跟踪控制的三自由度车辆模型和纵向运动跟踪控制的点质量模型,并建立基于模型预测控制的横纵向跟踪控制的非线性预测车辆模型;进行线性化和离散化之后建立跟踪控制器的目标函数和约束条件;通过 Matlab/SimuLink和 CarSim 搭建仿真平台,设计3种仿真工况验证设计的跟踪控制器的有效性,仿真结果表明:设计的跟踪控制器在横向和纵向都能跟踪期望的轨迹,具有较好的鲁棒性。

关 键 词:路径跟踪;速度跟踪;智能车辆;模型预测控制

中图分类号: U469.72; U461.1

文献标识码:A

文章编号:1674-8425(2021)11-0018-09

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



## Vehicle Tracking Control of Lateral and Longitudinal Based on Model Predictive Control

DENG Guohong<sup>1a</sup>, XIAO Haoxin<sup>1b</sup>, HAN Longhai<sup>1b</sup>, WU Pengfei<sup>1b</sup>, ZHANG Yong<sup>1b</sup>, QIN Liang<sup>1b,2</sup>

a. School of Mechanical Engineering;
 b. School of Vehicle Engineering,
 Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China;

2. Chongqing Dajiang Special Equipment for Smart Defense Co., Ltd., Chongqing 401320, China)

**Abstract:** The autonomous lane-changing behavior during vehicle driving is an important function that reflects the intelligence of self-driving vehicles. The lane-changing behavior can be divided into the

收稿日期:2020-11-19

基金项目: 重庆市基础与前沿研究计划项目(cstc2019jcyj-msxmX0204)

作者简介:邓国红,男,博士,教授,主要从事车辆动力学与 CAE 方面研究, E-mail; dengguohong@ cqut. edu. cn;通讯作者 覃亮,工程师, E-mail; 13436167783@ 163. com。

本文引用格式:邓国红,肖皓鑫,韩龙海,等. 基于模型预测控制的车辆横纵向跟踪控制[J]. 重庆理工大学学报(自然科学),2021,35 (11):18 - 26,57.

Citation format: DENG Guohong, XIAO Haoxin, HAN Longhai, et al. Vehicle Tracking Control of Lateral and Longitudinal Based on Model Predictive Control [J]. Journal of Chongqing University of Technology (Natural Science), 2021, 35 (11): 18 - 26,57.

generation of lane-changing intention, feasibility analysis, and the execution process of lanechanging, in which the lane-changing execution requires planning a safe lane-changing trajectory for the vehicle and tracking the trajectory under the premise of ensuring vehicle stability and safety. In order to improve the lateral and longitudinal tracking capability of the self-driving vehicle during the lane change, a vehicle lane change transverse and longitudinal tracking controller based on model predictive control is designed. A three-degree-of-freedom vehicle model is established as the vehicle lateral motion tracking control. Considering that the speed and acceleration changes in the longitudinal motion during the lateral motion will affect the vehicle lateral motion and reduce the control accuracy and safety, the point-mass model is used to build longitudinal controller, based on the model predictive control theory, a nonlinear predictive vehicle model for transverse-longitudinal tracking control is established. Considering that the predictive model is non-linear, the model is linearized and discretedin order to reduce the difficulty of solution. The objective function and constraints of the tracker are established and solved by quadratic programming, and three simulation conditions are used to verify the effectiveness of the tracking controller. The final simulation results show the established tracking controller has reasonable error under high speed conditions, the controller can track the desired trajectory better, the vehicle can drive stably, and the combined horizontal and vertical tracking controller has good effectiveness and robustness in lateral and vertical control.

Key words: path tracking; speed tracking; intelligent vehicles; model prediction control

跟踪控制是实现车辆自动驾驶的关键一步, 其目的是通过控制车辆的速度和前轮转向保证车 辆按照期望的轨迹行驶。现阶段国内外对车辆的 跟踪控制方法研究主要有:比例 - 积分 - 微分 (PID)控制<sup>[1]</sup>,其将真实输出值和参考值的偏差通 过比例、积分、微分进行线性组合进行控制,广泛 应用于工业界;反演控制[2],将高阶的非线性系统 细分为低阶子系统,选择合适的李亚普洛夫函数 确保系统稳定,并求解出最优控制率;模糊控 制[3],根据工程经验,确定控制变量的模糊控制规 则,常与 PID 算法结合形成 Fuzzy-PID 复合控制; 预瞄跟随理论[4],通过在道路前方设置一个预瞄 点,控制预瞄点和车道中心线的横向位移为0来 实现车辆对轨迹的跟踪;滑模控制[5],在控制系统 中设计一个滑模面,使状态量能在有限时间内到 达滑模面的一种变结构控制方法;线性二次型调 节器(LQR)<sup>[6]</sup>,适用于线性模型,通过反馈控制器 使目标函数达到最小值;以及模型预测控制 (MPC)<sup>[7]</sup>等多种方式。但由于车辆复杂性和运动 的不确定性,目前的跟踪控制器进行轨迹跟踪控 制时多数只控制车辆的横向运动,即控制车辆的 前轮转角进行换道操作。

1978年,模型预测控制<sup>[8]</sup> (model predictive

control, MPC) 这一概念被 Richalet 等学者提出,此 后模型预测控制被大量应用在了车辆控制、智能 产业中<sup>[9]</sup>。Sun 等<sup>[10]</sup>提出了一种基于模仿学习与 优化相结合的自动驾驶规划、控制模型,该模型包 括两层结构,上层通过 BP 神经网络对 MPC 进行 模仿来规划长期轨迹,下层通过 MPC 来进行跟 踪,并通过2个高速驾驶实例验证模型的有效性。 Chen 等[11]基于自行车模型和 8 自由度模型建立 了 2 个 MPC 控制器,并用 2 个控制器分别控制 8 自由度和14自由度车辆模型在特定工况下进行 验证比较,论证了基于自行车模型的 MPC 控制器 在运算速度上的优越性以及能更好满足实时性的 要求,而8自由度的控制器能够更加充分考虑到 转弯过程中车身侧倾与车轮载荷转移带来的影 响。Liu 等[12]研究了高速情况下自动驾驶车辆换 道过程,在保证模型保真度和计算可行性的前提 下,提出了变时间步长对动力学模型进行离散化 的方法,以此保证足够长的预测时间。Luo 等[13] 提出了一种鲁棒 MPC 控制方法,该控制方法包含 基于事件触发的(Event-Trigger)ETMPC 控制器和 状态反馈控制器,使系统在特定条件下在 MPC 控 制和状态反馈控制间来回切换。该方法旨在减少 MPC 的计算量,并提升系统鲁棒性,在计算量和控 制性能之间取得平衡。梁忠超等[14]提出了一种 动态卡尔曼滤波和 MPC 相结合的控制策略,通过不断更新卡尔曼状态观测器中的增益矩阵补偿车辆非线性和测量噪声带来的影响,使控制器能适应变化的车辆系统。石贞洪等[15] 采用以模糊控制来优化 MPC 控制器中目标函数权重系数的方法,使目标函数权重系数能根据跟踪误差以及路径曲率的变化进行动态调整,以此提升行驶安全性与系统稳定性。孙银健[16-17] 考虑到算法的实时性问题,提出了非线性系统与线性系统之间的转化方法,以及如何用标准二次规划方法求解MPC模型。

在此前对于换道跟踪控制器的研究中,未考 虑车辆在横向控制时的纵向运动控制,大多数是 对横向的行驶方向和纵向的速度设计独立的控制 器,且控制目标多为车辆的前轮转角而没有引入 纵向速度控制量,跟踪过程中的纵向速度为定值, 而车辆在换道过程中的行驶状态是由行驶方向和 行驶速度共同决定的,没有考虑纵向速度的变化 会大大降低控制精度和安全性。因此,本文以智 能车为研究对象,以模型预测控制算法为基础设 计了横纵向联合跟踪控制器,以前轮转角和纵向 加速度作为控制量。首先建立车辆横纵向联合控 制器的非线性预测模型,其次将非线性预测模型 进行线性化处理,然后进行二次规划求解,最优求 解车辆所需的前轮转角和加速度,最后进行仿真 验证,验证本文设计的横纵向联合跟踪控制器的 有效性和鲁棒性。

## 1 预测模型

使用何种预测模型是模型预测控制的关键内容,被控单元的效果由预测模型的精度决定,所建立的预测模型精度越高,预测的输出和被控单元的输出就会越贴近,但精度越高的模型伴随着更大的计算量,从而降低控制系统的响应速度。综合稳定性与实时性的考量,本文将会阐述如何选择适当的车辆模型作为横纵向跟踪控制器的预测模型。

根据文献[11]的表述,采用二轮3自由度模型(有横摆、纵向和横向3个自由度)作为预测模型(如图1所示)对车辆的轨迹进行跟踪时误差较小,能够输出理想的曲线。

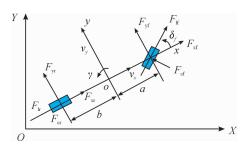


图1 3自由度车辆模型

根据图 1 所示, XOY 是大地坐标系, 将车辆质心作为原点, 构建坐标系 XOY、XOY 坐标系中, X 方向代表车辆的纵向运动方向, Y 轴和 1819 轴由右手定则确立。车辆3 自由度模型如式(1) 所示。

$$\begin{cases} m(\dot{v}_x - v_y \gamma) &= 2F_{lf} \cos \delta_f - 2F_{ef} \sin \delta_f + 2F_{lr} \\ m(\dot{v}_y + v_x \gamma) &= 2F_{lf} \sin \delta_f + 2F_{ef} \cos \delta_f + 2F_{er} \\ I_z \gamma &= 2a(F_{lf} \sin \delta_f + F_{ef} \cos \delta_f) - 2bF_{er} \end{cases}$$
(1)

式中:  $v_x$ 、 $v_y$  分别为纵向速度、横向速度(m/s);  $\gamma$  为车辆的横摆角速度((°)/s);  $\delta_f$  为前轮转角(°);  $F_{lf}$ 、 $F_{cf}$ 为地面施加于前轮的纵向力和横向力(N);  $F_{lr}$ 、 $F_{cr}$ 为地面施加于后轮的纵、横向力(N);  $I_z$  为z 轴的转动惯量(kg·m²); m 为汽车质量(kg); a 为质心到前轴距离; b 为质心到后轴距离(m)。

根据图 1 能够得到模型的前轮和后轮侧偏角  $\alpha_{r}$ 、 $\alpha_{r}$ 。

$$\alpha = \arctan(\frac{v_c}{v_t}) \tag{2}$$

式中:  $v_e$ 、 $v_l$  为轮胎的横向速度和纵向速度(m/s)。但由于车辆在行驶时,其纵向和横向的速度不容易直接获得,通常可以通过图 1 中汽车质心的纵向与横向速度  $v_x$ 、 $v_y$  轮胎的转角以及其余参数求解得到。

$$\begin{cases} v_{lf} = v_{xf} \cos \delta_f + v_{xf} \sin \delta_f \\ v_{ef} = v_{xf} \sin \delta_f - v_{xf} \cos \delta_f \\ v_{lr} = v_{xr} \end{cases}$$

$$(3)$$

$$\begin{cases} v_{xf} = v_{xr} = v_f \\ v_{yf} = v_y + a\gamma \\ v_{yr} = v_y - b\gamma \end{cases}$$
 (4)

在搭建预测模型前,需要对轮胎工作过程中的受力进行简化,因为轮胎具有显著的非线性特性,这样可以降低系统的复杂度。根据文献[18]

的试验和使用魔术轮胎公式搭建的模型在仿真之后所呈现出的结果显示,在正常行驶的工况中,轮胎的纵向滑移率 s 以及侧偏角都小于或者等于  $4 \sim 5$ ,车辆侧向加速度  $a_y \leq 0$ . 4g,轮胎的侧偏角和侧向力之间,以及滑移率和纵向力之间的关系可以看作是线性关系。考虑到本文所涉及的车辆在换道过程中,轮胎力会一直处于线性区域内,所以采用式(5)求得轮胎纵、横向力。

$$\begin{cases} F_t = C_t s \\ F_c = C_c s \end{cases} \tag{5}$$

由于模型中的车轮侧偏角在计算过程中有三 角函数关系,而在实际行驶过程中,考虑到车辆的 车轮转角和侧偏角数值都较小,因此可采用以下 的假设条件:

$$\sin \theta \approx \theta, \cos \theta \approx 1, \tan \theta \approx \theta$$
 (6)  $\theta$  值包括车轮转角以及侧偏角。

对前、后轮纵向力与横向力、车轮侧偏角进行 化简后可得到式(7)~(9):

$$\begin{cases} \alpha_{f} = \frac{v_{y} + a\gamma}{v_{x}} - \delta_{f} \\ \alpha_{r} = \frac{v_{y} - b\gamma}{v_{x}} \end{cases}$$
(7)

$$\begin{cases} F_{cf} = C_{cf} \left( \delta_f - \frac{v_y + a\gamma}{v_x} \right) \\ F_{cr} = C_{cr} \frac{b\gamma - v_y}{v_x} \end{cases}$$
(8)

$$\begin{cases} F_{lr} = C_{lr} s_r \\ F_{lf} = C_{ly} s_f \end{cases} \tag{9}$$

在对轨迹进行跟踪时,控制器的参考轨迹往往建立于大地坐标系之上,如图 2 所示,所以还需要确立车辆位置与大地坐标系之间的关系,具体的关系方程由式(10)所示。

$$\begin{cases} \dot{X} = \dot{x}\cos\varphi - \dot{y}\sin\varphi \\ \dot{Y} = \dot{x}\sin\varphi + \dot{y}\cos\varphi \end{cases}$$
 (10)

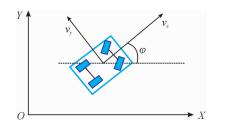


图 2 大地坐标系下的车辆位置

联立式(1)~式(10),得到横向模型,如式(11)所示。

$$\begin{cases} m\dot{v}_{y} = -mv_{x}\gamma + 2\left[C_{cf}\left(\delta_{f} - \frac{v_{y} + a\gamma}{v_{x}}\right) + C_{cr}\frac{b\gamma - v_{y}}{v_{x}}\right] \\ m\dot{v}_{x} = mv_{y}\gamma + 2\left[C_{lf}s_{f} + C_{cf}\left(\delta_{f} - \frac{v_{y} + a\gamma}{v_{x}}\right) + C_{lr}s_{r}\right] \\ I_{z}\dot{\gamma} = 2\left[aC_{cf}\left(\delta_{f} - \frac{v_{y} + a\gamma}{v_{x}}\right) - bC_{cr}\frac{b\gamma - v_{y}}{v_{x}}\right] \\ \dot{Y} = v_{x}\sin(\varphi) + v_{y}\cos(\varphi) \\ \dot{X} = v_{x}\cos(\varphi) - v_{y}\sin(\varphi) \end{cases}$$

$$(11)$$

此外还需要考虑车辆的纵向速度控制,以纵向位移 x 以及速度 v 作为纵向状态量,以加速度  $a_x$  作为纵向控制量,最终确定点质量模型为横纵向跟踪控制器的纵向预测模型,如式(12)所示:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \vdots \\ \dot{x} = a \end{cases} \tag{12}$$

同样地,需要确定车辆位置系和大地坐标系 之间的关系,其车速和大地坐标系下速度关系用 下列方程表示:

$$\begin{cases} \ddot{X} = \ddot{x}\cos(\varphi) - \ddot{y}\sin(\varphi) - \dot{Y}\dot{\varphi} \\ \ddot{Y} = \ddot{x}\sin(\varphi) + \ddot{y}\cos(\varphi) + \dot{X}\dot{\varphi} \end{cases}$$
(13)

综合车辆横向以及纵向运动预测模型得出,本文 所设计的车辆横纵联合跟踪控制器的非线性预测 模型如式(14)所示。

$$\begin{cases} m\dot{v}_{y} = -mv_{x}\gamma + 2\left[C_{ef}\left(\delta_{f} - \frac{v_{y} + a\gamma}{v_{x}}\right) + C_{er}\frac{b\gamma - v_{y}}{v_{x}}\right] \\ m\dot{v}_{x} = mv_{y}\gamma + 2\left[C_{tf}\delta_{f} + C_{ef}\left(\delta_{f} - \frac{v_{y} + a\gamma}{v_{x}}\right) + C_{tr}\delta_{r}\right] \\ I_{z}\dot{\gamma} = 2\left[aC_{ef}\left(\delta_{f} - \frac{v_{y} + a\gamma}{v_{x}}\right) - bC_{er}\frac{b\gamma - v_{y}}{v_{x}}\right] \\ \dot{Y} = v_{x}\sin(\varphi) + v_{y}\cos(\varphi) \\ \dot{X} = v_{x}\cos(\varphi) - v_{y}\sin(\varphi) \\ \dot{x} = v_{x} \\ \ddot{x} = a_{x} \\ \ddot{X} = \dot{v}_{x}\cos(\varphi) - \dot{v}_{y}\sin(\varphi) - \dot{Y}\gamma \end{cases}$$

$$(14)$$

在式(14)中含有2个加速度变化量,由于车辆的纵向速度通过控制加速度得到,因此对其进行修正:

 $\ddot{Y} = \dot{v}_x \sin(\varphi) + \dot{v}_x \cos(\varphi) + \dot{X}\gamma$ 

$$\begin{cases} m\dot{v}_{y} = -mv_{x}\gamma + 2\left[C_{cf}\left(\delta_{f} - \frac{v_{y} + a\gamma}{v_{x}}\right) + C_{cr}\frac{b\gamma - v_{y}}{v_{x}}\right] \\ m\dot{v}_{x} = ma_{x} \\ I_{z}\dot{\gamma} = 2\left[aC_{cf}\left(\delta_{f} - \frac{v_{y} + a\gamma}{v_{x}}\right) - bC_{cr}\frac{b\gamma - v_{y}}{v_{x}}\right] \\ \dot{Y} = v_{x}\sin(\varphi) + v_{y}\cos(\varphi) \\ \dot{X} = v_{x}\cos(\varphi) - v_{y}\sin(\varphi) \\ \dot{x} = v_{x} \\ \ddot{X} = \dot{v}_{x}\cos(\varphi) - \dot{v}_{y}\sin(\varphi) - \dot{Y}\gamma \\ \ddot{Y} = \dot{v}_{x}\sin(\varphi) + \dot{v}_{y}\cos(\varphi) + \dot{X}\gamma \\ \ddot{\Psi} = \dot{Y}_{x}\sin(\varphi) + \dot{V}_{y}\cos(\varphi) + \dot{X}\gamma \\ \ddot{\Psi} = \dot{Y}_{x}\sin(\varphi) + \dot{V}_{y}\cos(\varphi) + \dot{X}\gamma \end{cases}$$

把上式改写成状态空间方程:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = f(\xi, u) \\ \eta = h(\xi) \end{cases}$$
 (16)

式中:  $\boldsymbol{\xi} = [\dot{y}, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi}, Y, X, \dot{Y}, \dot{X}]^{\mathsf{T}}$  为状态量,  $\boldsymbol{u} = \lfloor a_x, \delta_f \rfloor$ 为控制量。

## 2 线性时变预测模型

由于式(14)所建立的模型是非线性的,对应 使用的控制算法也是非线性的,然而在实际的控 制过程中,模型要求控制过程的实时和稳定,非线 性模型预测控制很难达到要求,此外还会形成较 为复杂的非线性约束[19]。而将模型线性化之后, 可以使控制器性能更符合要求。常用的线性化方 法有近似线性化与精确线性化。本文选用近似线 性化的方法,其原因在于:MPC 控制器是一个闭环 控制器,它的反馈矫正以及滚动优化的特征使其 能够进行实时调节。每一个采样时刻都会根据控 制对象的实际输出,调节预测模型的输出,不断优 化更新,以减少因受外界因素扰动而产生控制输 出和参考值之间误差过大的问题。除此之外,因 为 MPC 要求较高的实时性,更精确的模型会要求 更高的算力以及更容易产生一些难以排查的 问题。

首先将前文中的非线性模型进行近似线性 化,采用文献[20]中所使用的方法,线性时变方程 如式(17)所示。

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{d} = A_{t}(t)\xi_{d}(t) + B_{t}(t)u_{d}(t) \\ \eta_{d} = C_{t}(t)\xi_{d}(t) + D_{t}(t)u_{d}(t) \end{cases}$$
(17)

式中:

$$A_{t}(t) = \frac{\partial f(\xi(t), u(t))}{\partial \xi(t)} \bigg|_{\xi(t), u(t-1)}$$

$$B_{t}(t) = \frac{\partial f(\xi(t), u(t))}{\partial u(t)} \bigg|_{\xi(t), u(t-1)}$$

$$C_{t}(t) = \frac{\partial h(\xi(t), u(t))}{\partial \xi(t)} \bigg|_{\xi(t), u(t-1)}$$

$$D_{t}(t) = \frac{\partial h(\xi(t), u(t))}{\partial u(t)} \bigg|_{\xi(t), u(t-1)}$$

之后对式(17)进行离散化处理。

$$\begin{cases} \xi_d(k+1) = A_{k,t}(k)\xi_d(k) + B_{k,t}(k)u_d(k) \\ \eta_d(k) = C_{k,t}(k)\xi_d(k) + D_{k,t}(k)u_d(k) \end{cases}$$
(18)

式中:  $A_{k,\iota}(k) = I + TA_{\iota}(t)$ ,  $B_{k,\iota}(k) = TB_{\iota}(t)$ ,  $C_{k,\iota}(k) = C_{\iota}(t)$ ,  $D_{k,\iota}(k) = D_{\iota}(t)$ , T 为离散后的系统采样周期,  $\xi_d(k+1) = \xi(k+1) - \xi_0(k+1)$ ,  $\xi_d(k) = \xi(k) - \xi_0(k)$ ,  $u_d(k) = u(k) - u_0$ .

根据式(18)中的条件进一步处理可以得到:

$$\begin{cases} \xi(k+1) = A_{k,t}(k)\xi(k) + B_{k,t}(k)u(k) + d_{k,0}(k) \\ \eta(k) = C_{k,t}(k)\xi(k) + D_{k,t}(k)u(k) \end{cases}$$
(19)

式中:  $d_{k,0}(k) = \xi_0(k+1) - A_{k,\iota}\xi_0(k) - B_{k,\iota}u_0\xi_0(k+1)\xi_0(k+1)$ 指的是系统在整个采样周期中用连续的控制量  $u_0$  所获得的新的采样时刻的状态量。

为了使控制器稳定运行,需要对控制量的变化量施加约束,因为上式中的控制量会在控制过程中产生跳变。此处把式(19)里的控制量u(k)改写成控制增量  $\Delta u(k)$ ,将控制增量进行约束从而减少控制过程中的跳变,因此式(19)应改写为:

$$\tilde{\xi}(k) = \begin{bmatrix} \xi(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix} 
\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$$
(20)

经过线性化和离散化后的状态空间方程为:

$$\begin{cases}
\tilde{\boldsymbol{\xi}}(k+1) = \tilde{\boldsymbol{A}}_{k,t} \tilde{\boldsymbol{\xi}}(k) + \tilde{\boldsymbol{B}}_{k,t} \Delta u(k) + \tilde{\boldsymbol{d}}_{k,t}(k) \\
\eta(k) = \tilde{\boldsymbol{C}}_{k,t} \tilde{\boldsymbol{\xi}}(k) + \tilde{\boldsymbol{D}}_{k,t} \Delta u(k)
\end{cases}$$
(21)

式中: 
$$\tilde{\boldsymbol{A}}_{k,t} = \begin{bmatrix} A_{k,t} & B_{k,t} \\ 0_{m \times x} & I_m \end{bmatrix}, \ \tilde{\boldsymbol{B}}_{k,t} = \begin{bmatrix} B_{k,t} \\ I_m \end{bmatrix}, \ \tilde{\boldsymbol{C}}_{k,t} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}, \tilde{\boldsymbol{D}}_{k,t} = D, \ \tilde{\boldsymbol{d}}_{k,t}(k) = \begin{bmatrix} d_{k,0}(k) \\ 0 \end{bmatrix}, \ D = 0_{m \circ}$$

 $\tilde{A}_{k,\iota}$ 、 $\tilde{B}_{k,\iota}$ 为不同预测时域中状态量系数矩阵,

由于 $\tilde{A}_{k,\iota}$ , $\tilde{B}_{k,\iota}$ 的不同会影响到系统实时性,对此将做出下列简化:

通过式(22)判断  $N_p$  中系统未来每个采样时刻的状态量以及输出量。

此处把式(21)写作矩阵来表述  $N_p$  中的系统 状态量以及输出量。

$$Y(k) = \psi_k \tilde{\xi}(k) + \Theta_k \Delta U(k) + \Phi_k D_K(k)$$
 (23)  
式中各矩阵如下:

$$\boldsymbol{Y}(k) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}(k+1|k) \\ \boldsymbol{\eta}(k+2|k) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\eta}(k+N_c|k) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\eta}(k+N_p|k) \end{bmatrix} \boldsymbol{D}(k) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_{k,t}(k+1|k) \\ \tilde{\boldsymbol{d}}_{k,t}(k+2|k) \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{d}}_{k,t}(k+N_c|k) \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{d}}_{k,t}(k+N_p|k) \end{bmatrix}$$

$$\Delta U(k) = \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N_c+1) \end{bmatrix} \qquad \psi_k = \begin{bmatrix} C_{k,t} A_{k,t} \\ \tilde{C}_{k,t} \tilde{A}_{k,t}^2 \\ \vdots \\ \tilde{C}_{k,t} \tilde{A}_{k,t}^{N_c} \\ \vdots \\ \tilde{C}_{k,t} \tilde{A}_{k,t}^{N_c} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Theta}_{k} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{C}}_{k,t} \tilde{\boldsymbol{B}}_{k,t} & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{\boldsymbol{C}}_{k,t} \tilde{\boldsymbol{A}}_{k,t} \tilde{\boldsymbol{B}}_{k,t} & \tilde{\boldsymbol{C}}_{k,t} \tilde{\boldsymbol{B}}_{k,t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{C}}_{k,t} \tilde{\boldsymbol{A}}_{k,t}^{N_{c}-1} \tilde{\boldsymbol{B}}_{k,t} & \tilde{\boldsymbol{C}}_{k,t} \tilde{\boldsymbol{A}}_{k,t}^{N_{c}-2} \tilde{\boldsymbol{B}}_{k,t} & \cdots & \tilde{\boldsymbol{C}}_{k,t} \tilde{\boldsymbol{B}}_{k,t} \\ \tilde{\boldsymbol{C}}_{k,t} \tilde{\boldsymbol{A}}_{k,t}^{N_{c}} \tilde{\boldsymbol{B}}_{k,t} & \tilde{\boldsymbol{C}}_{k,t} \tilde{\boldsymbol{A}}_{k,t}^{N_{c}-1} \tilde{\boldsymbol{B}}_{k,t} & \cdots & \tilde{\boldsymbol{C}}_{k,t} \tilde{\boldsymbol{A}}_{k,t} \tilde{\boldsymbol{B}}_{k,t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{C}}_{k,t} \tilde{\boldsymbol{A}}_{k,t}^{N_{p}-1} \tilde{\boldsymbol{B}}_{k,t} & \tilde{\boldsymbol{C}}_{k,t} \tilde{\boldsymbol{A}}_{k,t}^{N_{p}-1} \tilde{\boldsymbol{B}}_{k,t} & \cdots & \tilde{\boldsymbol{C}}_{k,t} \tilde{\boldsymbol{A}}_{k,t}^{N_{p}-N_{c}} \tilde{\boldsymbol{B}}_{k,t} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{k} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{C}}_{k,t} & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{\boldsymbol{C}}_{k,t} \tilde{\boldsymbol{A}}_{k,t} & \tilde{\boldsymbol{C}}_{k,t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{C}}_{k,t} \tilde{\boldsymbol{A}}_{k,t} & \tilde{\boldsymbol{C}}_{k,t} \tilde{\boldsymbol{A}}_{k,t} & ^{N_{c}-2} & \cdots & \tilde{\boldsymbol{C}}_{k,t} \\ \tilde{\boldsymbol{C}}_{k,t} \tilde{\boldsymbol{A}}_{k,t} & \tilde{\boldsymbol{C}}_{k,t} \tilde{\boldsymbol{A}}_{k,t} & ^{N_{c}-1} & \cdots & \tilde{\boldsymbol{C}}_{k,t} \tilde{\boldsymbol{A}}_{k,t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{C}}_{k,t} \tilde{\boldsymbol{A}}_{k,t} & \tilde{\boldsymbol{C}}_{k,t} \tilde{\boldsymbol{A}}_{k,t} & ^{N_{p}-2} & \cdots & \tilde{\boldsymbol{C}}_{k,t} \tilde{\boldsymbol{A}}_{k,t} & ^{N_{p}-N_{c}} \end{bmatrix}$$

### 3 线性时变模型预测跟踪控制器

### 3.1 目标函数与约束问题

优化问题的重点在于目标函数,目标函数可以显示设计的系数追求的一些特定的目的。在目标函数的设计过程中,需要确保车辆可以平稳而且迅速地跟踪上期望路径以及期望速度。此外为确保求解器可以在约束条件限制下求得最优解,需要在目标函数中加入松弛因子  $\varepsilon$ 。本文参考文献[20],使用了二次型目标函数:

$$J = || Y(k) - Y_{\text{ref}}(k) ||_{\tilde{Q}}^{2} + || \Delta U(t) ||_{\tilde{R}}^{2} + \rho \varepsilon^{2}$$
(24)

 $\tilde{\pmb{R}} = \operatorname{diag}(R,R,\cdots R)_{N_e}$ 、 $\tilde{\pmb{Q}} = \operatorname{diag}(Q,Q,\cdots R)_{N_p}$ 分别代表控制增量和控制输出量的加权矩阵, $\rho$  是松弛因子的权重系数。 $Y_{\mathrm{ref}}(k)$  表示此时刻的参考状态。

考虑到车辆行驶过程中的安全性,需要对输出量、控制量 $(a_x, \delta_f)$ 、控制量增量 $(\Delta a_x, \Delta \delta_f)$ 作出如下约束:

$$\begin{cases} u_{\min}(k+i) \leq u(k+i) \leq u_{\max}(k+i), \\ i = 0, 1, \dots, N_c - 1 \\ \Delta u_{\min}(k+i) \leq \Delta u(k+i) \leq \Delta u_{\max}(k+i), \\ i = 0, 1, \dots, N_c - 1 \\ \tilde{\eta}_{\min}(k+i) \leq \tilde{\eta}(k+i) \leq \tilde{\eta}_{\max}(k+i), \\ i = 0, 1, \dots, N_p - 1 \end{cases}$$

$$(25)$$

把式(24)和式(25)整理过后得到系统的优化函数。

$$\begin{cases} \min J = \| Y(k) - Y_{\text{ref}}(k) \|_{\tilde{Q}}^{2} + \\ \| \Delta U(t) \|_{\tilde{R}}^{2} + \rho \varepsilon^{2} \end{cases}$$
s. t.
$$u_{\min}(k+i) \leq u(k+i) \leq u_{\max}(k+i) ,$$

$$i = 0, 1, \dots, N_{c} - 1$$

$$\Delta u_{\min}(k+i) \leq \Delta u(k+i) \leq \Delta u_{\max}(k+i) ,$$

$$i = 0, 1, \dots, N_{c} - 1$$

$$\tilde{\eta}_{\min}(k+i) \leq \tilde{\eta}(k+i) \leq \tilde{\eta}_{\max}(k+i) ,$$

$$i = 0, 1, \dots, N_{c} - 1$$

$$\tilde{\eta}_{\min}(k+i) \leq \tilde{\eta}(k+i) \leq \tilde{\eta}_{\max}(k+i) ,$$

$$i = 0, 1, \dots, N_{c} - 1$$

### 3.2 优化求解

式(26)设计的优化函数是二次型函数,二次型函数的求解,可以转化为二次规划问题,即:

$$\boldsymbol{J}(\Delta U) \ = \ \frac{1}{2} \bigg[ \frac{\Delta U(k)}{\varepsilon} \bigg]^{\mathrm{T}} H_k \bigg[ \frac{\Delta U(k)}{\varepsilon} \bigg] + f_k \bigg[ \frac{\Delta U(k)}{\varepsilon} \bigg]$$

$$\text{s. t.} \begin{bmatrix} T & 0 \\ -T & 0 \\ L & 0 \\ -L & 0 \\ \Theta_{K} & 0 \\ -\Theta_{K} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U(k) \\ \varepsilon \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} \Delta U_{\max}(k) \\ -\Delta U_{\min}(k) \\ U_{\max} - U(k) \\ U(k) - U_{\min} \\ Y_{\max}(k) - \psi_{k} \tilde{\xi}(k) - \Phi_{k} D_{k}(k) \\ \psi_{k} \tilde{\xi}(k) + \Phi_{k} D_{k}(k) - Y_{\min}(k) \end{bmatrix}$$

在每个采样时间,都可以使用二次规划确定 最优,算得控制器的最优控制序列:

$$\Delta U = \begin{bmatrix} \Delta u^{*}(k|k) \\ \Delta u^{*}(k+1|k) \\ \vdots \\ \Delta u^{*}(k+N_{c}-1|k) \end{bmatrix}$$
(28)

在式(28)中,如果把第一项当成是目前时刻的控制增量,那么目前时刻的控制量就是上一个时刻控制量和目前控制增量的和,即:

$$u(k) = u(k-1|k) + \Delta u(k)$$
 (29)

然后进行下一次求解,重复上述过程,获得最优控制序列。

## 4 仿真验证

在 Matlab/Simulink 和 CarSim 软件中搭建横 纵向联合跟踪控制器以及车辆动力学模型,整车 参数如表1所示。

表1 整车参数

参数	数值
整车质量 M/kg	1 270
质心到前轴的距离 a/m	1.015
轴距 L/m	2.91
车轮半径 R/m	0.325
转动惯量 $I_z/(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2)$	1 536.7
质心高度 h/m	0.54

目前国内外大多数研究智能车辆的换道路径跟踪性能时选择等速偏移的换道轨迹、正反梯形加速度的换道轨迹、圆弧的换道轨迹和多项式的换道轨迹。本文选取 5 次多项式换道轨迹作为车辆横向跟踪的参考轨迹,纵向运动跟踪参考速度选择基于 sin 的函数参数。

车辆横向运动参考轨迹表达式为:

$$y(x) = a_{5}x^{5} + a_{4}x^{4} + a_{3}x^{3} + a_{2}x^{2} + a_{1}x + a_{0}$$

$$\begin{bmatrix} a_{0} \\ a_{1} \\ a_{2} \\ a_{3} \\ a_{4} \\ a_{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{0} & x_{0}^{2} & x_{0}^{3} & x_{0}^{4} & x_{0}^{5} \\ 0 & 1 & 2x_{0} & 3x_{0}^{2} & 4x_{0}^{3} & 5x_{0}^{4} \\ 0 & 0 & 2 & 6x_{0} & 12x_{0}^{2} & 20x_{0}^{3} \\ 1 & x_{1} & x_{1}^{2} & x_{1}^{3} & x_{1}^{4} & x_{1}^{5} \\ 0 & 1 & 2x_{1} & 3x_{1}^{2} & 4x_{1}^{3} & 5x_{1}^{4} \\ 0 & 0 & 2 & 6x_{0} & 12x_{0}^{2} & 20x_{0}^{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{0} \\ \dot{y}_{0} \\ \ddot{y}_{1} \\ \dot{y}_{1} \\ \ddot{y}_{1} \\ \ddot{y}_{1} \end{bmatrix}$$

$$(31)$$

式(30)中的常数  $a_0$ 、 $a_5$  由式(31)确定。

车辆纵向运动参考速度为:

$$V_{\text{ref}}(X) = v_0 + f_z \sin(z_3(X))$$
 (32)

式中:  $V_{ref}$ 表示参考速度;  $v_0$  表示车辆初始速度;  $f_z$  表示速度幅值;  $z_3(X)$  表示与纵向位移有关的函数。

为了验证本文设计的横纵向联合跟踪控制器 的有效性和鲁棒性,设置3种不同初始车速下的 横向和纵向工况下的跟踪能力。

从上述仿真结果可以看出,车辆在不同工况下的横纵向跟踪控制能力基本上可以跟踪上期望的轨迹。图 3~5 表示车辆在不同车速下的横向跟踪性能。从图 3、4 中可看出,控制器能够使车辆在不同车速下基本上按照期望的换道轨迹行驶。

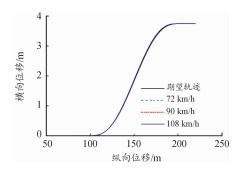


图3 车辆横向位移

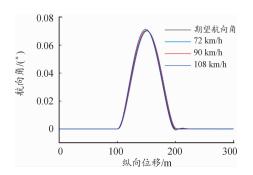


图 4 车辆航向角

图 5 为车辆在不同车速下的横向跟踪误差,随着车速的增加其跟踪效果下降,但从图中可看出车辆在 108 km/h 的车速下横向跟踪误差在 0.05 m 范围内,控制器的横向跟踪性能较好。

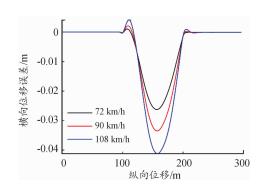


图 5 车辆横向跟踪误差

图 6、7 表示车辆的纵向跟踪性能,其中图 6 设置了3 种不同的速度参考轨迹,车辆能够较好地跟踪上期望的速度轨迹。

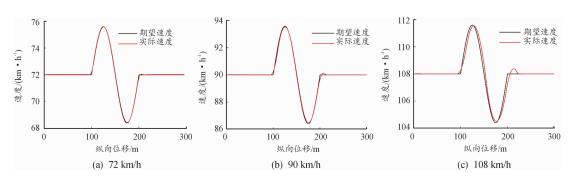


图 6 车辆速度跟踪

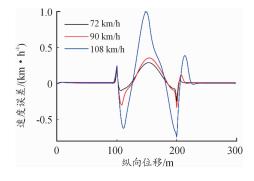


图7 车辆速度跟踪误差

图 7 表示车辆在 3 种速度下的跟踪误差,从图中可以看出控制器在 72 km/h 和 90 km/h 状态下跟踪误差都在 0.5 km/h 内,但随着速度继续增加,在 108 km/h 的速度跟踪误差达到了 1 km/h,

表明控制器的跟踪效果随着速度增加变差。

图 8 和图 9 表示车辆在不同车速下的前轮转 角和加速度变化。

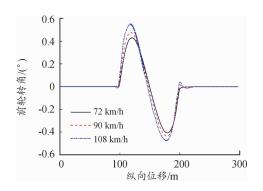


图 8 车辆前轮转角

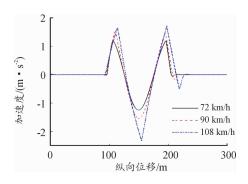


图 9 车辆加速度变化

从图 6 中可以得出,随车速提高,前轮转角变化幅度随之增大,在 108 km/h 的速度下,前轮转角的变化也在 0.6°以内,车辆能够稳定行驶;从图 9 可以看出加速度的变化随着车速增加变化范围为从 78 km/h 速度下的[-1 1]增加到了 108 km/h 速度下的[-2.2 2],表明其跟踪性能随着速度增加而下降。结合控制器的横纵向跟踪性能可以得出,该控制器基本上能够较好地跟踪期望轨迹,但其高速的跟踪性能低于低速的跟踪性能。

## 5 结论

考虑到多数研究只针对换道过程中车辆横向 位置变化设计了跟踪控制器,而没有考虑到纵向 速度变化带来的影响,本文以 MPC 算法为基础, 设计了横向路径跟踪与纵向速度跟踪的控制器, 将3自由度车辆模型和点质量模型相结合,在通 过前轮转角对车辆换道进行横向控制的同时考虑 车辆的纵向运动带来的影响,并将加速度作为控 制量控制纵向运动,为了减少控制器在运行过程 中的复杂度和保证模型稳定性,对模型中的非线 性部分进行了线性化和离散化,最后使用二次规 划求解目标函数。在仿真环节,设计了72、90、 108 km/h 3 种速度的仿真工况对控制器的效果进 行验证,结果表明:控制横向跟踪误差在 0.04 m 内,控制器能较好地跟踪期望轨迹,速度跟踪误差 在1 km/h内,前轮转角增幅在0.6°内,变化较为平 缓,汽车能够稳定行驶,加速度变化范围随着车速 提高也有所增大,其变化范围为[-2.2 2],虽然 高速下的跟踪效果有所下降,但仍符合预期。仿 真结果表明:本文设计的横纵向联合跟踪控制器 在横向和纵向控制上有较好的有效性和鲁棒性。

## 参考文献:

- [1] MARINO R, SCALZI S, NETTO M. Nested PID steering control for lane keeping in autonomous vehicles [J]. Control Engineering Practice, 2011, 19(12); 1459 – 1467.
- [2] 游峰. 智能车辆自动换道与自动超车控制方法的研究 [D]. 长春: 吉林大学,2005.
- [3] 李逃昌,胡静涛,高雷,等.基于模糊自适应纯追踪模型的农业机械路径跟踪方法[J].农业机械学报,2013,44(1):205-210.
- [4] 赵治国,周良杰,朱强. 无人驾驶车辆路径跟踪控制预 瞄距离自适应优化[J]. 机械工程学报,2018,54(24): 180-187.
- [5] 姜立标, 杨杰. 基于滑模控制的自动泊车系统路径跟踪研究[J]. 农业机械学报, 2019, 50(2): 356 364.
- [6] 黄海洋,张建,王宇,等.基于多点预瞄最优控制的智能车辆路径跟踪[J].汽车技术,2018(10):6-9.
- [7] LIU C, LEE S, VARNHAGEN S, et al. Path planning for autonomous vehicles using model predictive control [C]//Intelligent Vehicles Symposium. IEEE, 2017.
- [8] RICHALET J, RAULT A, TESTUD J L, et al. Model predictive heuristic control: Applications to an industrial process[J]. Automatica, 1978, 14(5):413-428.
- [9] 龚建伟,姜岩,徐威. 无人驾驶车辆模型预测控制 [M]. 北京:北京理工大学出版社,2014.
- [10] SUN L, PENG C, ZHAN W, et al. A fast integrated planning and control framework for autonomous driving via imitation learning [J]. arXiv; Aritificial Intelligence, 2017.
- [11] CHEN Shuping, CHEN Huiyan, Dan NEGRUT. Implementation of MPC-based trajectory tracking considering different fidelity vehicle models [J/OL]. Journal of Beijing Institute of Technology, 2020(3):303-316.
- [12] LIU Kai, GONG Jianwei, Kurt A, et al. Dynamic modeling and control of high-speed automated vehicle for lane change maneuver [J]. IEEE Transactions on Intelligent Vehicles, 2018, 3(3):329 339.
- [13] LUO Y,XIA Y Q,SUN Z Q. Robust event-triggered model predictive control for constrained linear continuous system [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2019, 29(5):1216-1229.

(下转第57页)

- 识别车内声源[J]. 噪声与振动控制,2013,33(2):77-81.
- [2] 杨洋,褚志刚. 汽车路面噪声多重相干分解方法研究 [J]. 振动与冲击,2015,34(19):31-36.
- [3] 刘佳音,于晓光,王琦,等.基于 Hankel 矩阵与奇异值 分解降噪方法的齿轮故障诊断研究[J]. 机床与液压, 2018,46(1):158-162,172.
- [4] 琚林锋,彭博,范佳亮,等. 一种用于汽车道路噪声主动控制的参考信号选择方法:中国, CN110688956A
  [P]. 2020 01 14.
- [5] 赵伟丰,王文彬,周浩东. 车内低频路噪问题的分析与控制[J]. 噪声与振动控制,2019,39(3):142-146.
- [6] NIKOS Z, MARCO B, ANDY M, et al. Active control of structure-borne road noise based on the separation of front and rear structural road noise related dynamics [Z]. SAE International Journal of Passenger Cars-Mechanical Systems, 2015.
- [7] 肖忠弟, 靳畅, 魏娜, 等. OTPA 结合声场分析在路噪开发中的应用[J]. 噪声与振动控制, 2020, 40(2):140-145,151.
- [8] 伍先俊,吕亚东,隋富生.工况传递路径分析法原理及 其应用[J].噪声与振动控制,2014,34(1);28-31.

- [9] 孟宗,刘子涵,吕蒙.基于改进奇异值分解滤波和谱峭度的滚动轴承故障诊断[J]. 中国机械工程,2020,31 (20):2420-2428.
- [10] 尹立言,向新,张婧怡,等.基于双路奇异值分解的信号降噪方法[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2019,20(5):51-57.
- [11] ELLIOTT A S, MOORHOUSE A T, HUNTLEY T, et al.
  Insitu source path contribution analysis of structure borne
  road noise[J]. Journal of Sound and Vibration, 2013, 332
  (24):6276-6295.
- [12] SOTTEK R, PHILIPPEN B. Separation of airborne and structure-borne tire-road noise based on vehicle interior noise measurements [Z]. SAE International, 2010 – 01 – 1430.
- [13] ZHANG J A, MURATA N, MAENO Y, et al. Coherence-based performance analysis on noise reduction in multi-channel active noise control systems [J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2020, 148 (3):1519-1528.

(责任编辑 江 磊)

#### (上接第26页)

- [14] 梁忠超,张欢,赵晶,等. 基于自适应 MPC 的无人驾驶 车辆轨迹跟踪控制[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2020,41(6):835-840.
- [15] 石贞洪, 江洪, 于文浩, 等. 适用于路径跟踪控制的自适应 MPC 算法研究[J]. 计算机工程与应用, 2020, 56 (21): 266-271.
- [16] 孙银健. 基于模型预测控制的无人驾驶车辆轨迹跟踪控制算法研究[D]. 北京:北京理工大学,2015.
- [17] 夏万林. 智能分布式驱动电动车动力学控制方法研究 [D]. 重庆: 重庆理工大学,2018.

- [18] 余志生. 汽车理论[M]. 北京: 机械工业出版社,2009.
- [19] FALCONE P, TUFO M, BORRELLI F, et al. A linear time varying model predictive control approach to the integrated vehicle dynamics control problem in autonomous systems [C]//IEEE Conference on Decision & Control. IEEE, 2007.
- [20] QIN S J, BADGWELL T A. An overview of industrial model predictive control technology [J]. Control Engineering Practice, 1997, 93(7):232 – 256.

(责任编辑 林 芳)